Hertentamen Lineaire Algebra 1 (Wiskundigen)

Donderdag, 29 maart 2012, 14.00-17.00

Geen rekenmachines. Motiveer elk antwoord.

1. Voor alle $a \in \mathbb{R}$ definiëren we de matrix C_a als

$$C_a = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -2 & a & 1 \\ -1 & a & -1 \end{pmatrix}.$$

Verder definiëren we

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal voor alle $a \in \mathbb{R}$ de rang van de matrix C_a.

(b) Is C_a inverteerbaar voor $a = 0$? Zo nee, geef aan waarom niet; zo ja, geef de inverse.

(c) Bepaal voor elke $a \in \mathbb{R}$ het aantal oplossingen $x \in \mathbb{R}^3$ van de vergelijking $C_a \cdot x = av$ (oneindig is uiteraard ook een aantal).

2. Zij $L \subset \mathbb{R}^3$ de lijn gegeven door $x_1 = 2x_2$ en $x_3 = 1$.

(a) Geef een vergelijking voor het vlak $V \subset \mathbb{R}^3$ dat het punt $(1, 0, 2)$ bevat en dat loodrecht staat op L.

(b) Bepaal de afstand van het punt $p = (1, 3, -1)$ tot L.

3. Zij $U_1 \subset \mathbb{R}^3$ het vlak opgespannen door $(1, 2, 0)$ en $(2, 2, 1)$. Zij $U_2 \subset \mathbb{R}^3$ het vlak gegeven door $3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$. Bepaal een basis voor $(U_1 \cap U_2)^\perp$, dus voor het orthogonale complement van $U_1 \cap U_2$.

Op de volgende pagina staan meer opgaven.

4. Zij $V = P_3(\mathbb{R})$ de vectorruimte van alle reële polynomen van graad hooguit 3 en $D\colon V \to V$ de afbeelding gegeven door $D(f) = f + f''$ waarbij f'' de tweede afgeleide van f is.

   (a) Laat zien dat D een lineaire afbeelding is.

   (b) We nemen de basis $B = (1, x, x^2, x^3)$. Bepaal de matrix $[D]_B^B$ geassocieerd aan D ten opzichte van B.

   (c) Bepaal alle eigenwaarden van D en een basis voor elk van de bijbehorende eigenruimtes. (Deze bases bestaan dus uit elementen van V.)

   (d) Is D diagonaliseerbaar?

5. Zij V een vectorruimte over een lichaam F en $f\colon V \to V$ een injectieve lineaire afbeelding. Laat zien dat voor elk positief geheel getal n en elk rijtje $v_1, v_2, \ldots, v_n$ van n lineair onafhankelijke vectoren geldt dat de n beelden $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ ook lineair onafhankelijk zijn.

6. Gegeven zijn twee matrices A en B waarvan het product AB bestaat. Bewijs
$$\text{rang } AB \leq \text{rang } B.$$