Tentamen Lineaire Algebra 1 (Wiskundigen)

Donderdag, 23 januari 2014, 10.00-13.00

Geen rekenmachines. Motiveer elk antwoord.

1. Voor alle reële getallen a definiëren we de matrix C_a als

$$C_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & a & 2 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verder definiëren we

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal voor alle reële waarden van a de rang van de matrix C_a.

(b) Is C_a inverteerbaar voor $a = 0$? Zo nee, geef aan waarom niet; zo ja, geef de inverse.

(c) Voor welke $a \in \mathbb{R}$ heeft de vergelijking $C_a \cdot x = v$ precies één oplossing x in $\mathbb{R}^3$?

(d) Beschrijf de volledige oplossingsverzameling van de vergelijking $C_a \cdot x = v$ voor $a = -1$.

Antwoord.

(a) De rang is maximaal, dus 3, als de determinant ongelijk is aan 0. Ontwikkelen naar de eerste rij geeft

$$\begin{aligned} \det C_a &= 1 \cdot (a \cdot 1 - 1 \cdot 2) - a \cdot (1 \cdot 1 - a \cdot 2) + 1 \cdot (1 \cdot 1 - a \cdot a) \\ &= a^2 - 1 = (a-1)(a+1). \end{aligned}$$

Dus voor $a \neq \pm 1$ is de rang gelijk aan 3. Voor $a = \pm 1$ geldt

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{and} \qquad C_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

In beide gevallen zijn er twee niet-nul rijen die geen veelvoud van elkaar zijn, dus er zijn minstens twee lineair onafhankelijke rijen, dus de rang is minstens 2. Maar omdat de determinant gelijk is aan $(\pm 1)^2 - 1 = 0$, is de rang niet maximaal, dus kleiner dan 3, dus de rang is in beide gevallen gelijk aan 2.

(b) Voor $a = 0$ is de determinant gelijk aan $0^2 - 1 = -1 \neq 0$, dus C_0 is inverteerbaar. Met behulp van rij-operaties beginnend met

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) =$$

(rij-operaties hier weggelaten) vind je

$$C_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) De vergelijking heeft precies één oplossing dan en slechts dan als C_a inverteerbaar is, dus wegens (a) dan en slechts dan als $a \neq \pm 1$. Als de rang namelijk kleiner is (dus voor $a = \pm 1$), dan zit v ofwel niet in het beeld (en is er geen enkele oplossing), of v zit wel in het beeld, maar dan zijn er oneindig veel oplossingen, want de kern van C_a is dan 1-dimensionaal.

(d) Voor $a = -1$ is de uitgebreide matrix gelijk aan

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Deze matrix zou je kunnen gaan vegen om een eerste oplossing te vinden. Maar zonder te vegen zien we al een oplossing (v is gelijk aan de laatste kolom), namelijk

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daar kunnen we nog elementen van de kern bij optellen. Met behulp van rij-operaties (hier niet weergegeven: trek bovenste rij af van de tweede en tel hem op bij de derde; trek daarna twee keer de nieuwe tweede rij van de derde af) vinden we dat de "row echelon form" van C_{-1} gelijk is aan

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Er is één kolom zonder pivot, namelijk de tweede. De bijbehorende voortbrenger van de kern is

$$z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De volledige oplossingsverzameling kan op verschillende manieren geschreven worden en is bijvoorbeeld gelijk aan

$$\{\, x + \lambda z \;:\; \lambda \in \mathbb{R} \,\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \;:\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. Zij A de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal alle eigenwaarden van A en bepaal voor elke eigenwaarde een basis voor de bijbehorende eigenruimte.

(b) Bepaal een diagonaalmatrix D en een inverteerbare matrix P zodanig dat geldt $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

(c) Bereken A^{2014}. In je antwoord mag je uitdrukkingen zoals 7^{2014} laten staan.

Antwoord.

(a) Het karakteristiek polynoom van A is

$$\det \begin{pmatrix} t-5 & 2 \\ -3 & t \end{pmatrix} = (t-5)t - (-3 \cdot 2) = (t-2)(t-3),$$

dus de eigenwaarden zijn 2 en 3. De eigenruimte bij $\lambda = 2$ is gelijk aan

$$E_2(A) = \ker(A - 2I) = \ker \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = L(v_2) \qquad \text{met} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

De eigenruimte bij $\lambda = 3$ is gelijk aan

$$E_3(A) = \ker(A - 3I) = \ker \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = L(v_3) \qquad \text{met} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) D bevat de eigenwaarden en P de eigenvectoren als kolommen, dus we krijgen

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{en} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(c) Er geldt

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},$$

dus

$$A^{2014} = (PDP^{-1})^{2014} = PD^{2014}P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{2014} & 0 \\ 0 & 3^{2014} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \cdot 2^{2014} + 3 \cdot 3^{2014} & 2 \cdot 2^{2014} - 2 \cdot 3^{2014} \\ -3 \cdot 2^{2014} + 3 \cdot 3^{2014} & 3 \cdot 2^{2014} - 2 \cdot 3^{2014} \end{pmatrix}.$$

3. Zij $U \subset \mathbb{R}^3$ het vlak door $(0,0,0)$ dat loodrecht staat op de vector $a = (-1, 2, 1)$. Zij $V \subset \mathbb{R}^3$ het vlak opgespannen door $v = (1,2,0)$ en $w = (2,2,1)$, dus

$$V = \{\, \lambda v + \mu w \;:\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \,\}.$$

Bepaal een basis voor de doorsnede $U \cap V$.

Antwoord.

Er zijn veel manieren om deze vraag te beantwoorden. Een van de makkelijkste is de volgende. De doorsnede bestaat uit alle elementen $x = \lambda v + \mu w$ waarvoor geldt $\langle x, a\rangle = 0$. Voor λ en μ betekent dit

$$0 = \langle x, a\rangle = \langle \lambda v + \mu w, a\rangle = \lambda\langle v, a\rangle + \mu\langle w, a\rangle = 3\lambda + 3\mu,$$

dus $\lambda = -\mu$, en dus volgt $x = \mu(w - v)$. Deze x zijn inderdaad in de doorsnede bevat, dus de doorsnede wordt voortgebracht door $w - v = (1, 0, 1)$ en deze vector vormt dus ook een basis voor $U \cap V$.

4. Zij $V = \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ de reële vectorruimte van alle 2×2 matrices. Definiëer

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dan is $B = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ een basis voor V (dit hoef je niet te bewijzen). Zij $f\colon V \to V$ de elementaire rij-operatie die 2 keer de eerste rij bij de tweede optelt. Voor

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{geldt dus} \qquad f(M) = \begin{pmatrix} a & b \\ c + 2a & d + 2b \end{pmatrix}.$$

(a) Laat zien dat f een lineaire afbeelding is.

(b) Is f een isomorfisme?

(c) Wat is de rang van f?

(d) Bepaal de matrix $[f]^B_B$.

(e) Laat zien dat $\lambda = 1$ de enige eigenwaarde van f is.

(f) Is f diagonaliseerbaar?

Antwoord.

(a) Voor

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \qquad \text{en} \qquad N = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

geldt

$$\begin{aligned}
f(M+N) &= f\left(\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2+2(a_1+a_2) & d_1+d_2+2(b_1+b_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1+2a_1 & d_1+2b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2+2a_2 & d_2+2b_2 \end{pmatrix} = f(M)+f(N).
\end{aligned}$$

Net zo laat men ook zien dat $f(\lambda M) = \lambda f(M)$ voor $\lambda \in \mathbb{R}$, dus f is inderdaad lineair.

(b) Zij $g\colon V \to V$ de elementaire rij-operatie die twee keer de eerste rij van de twee aftrekt. Dan is g de inverse afbeelding van f, dus f is bijectief, en dus is f een isomorfisme.

(c) De afbeelding f is surjectief, dus de rang van f is $\dim \operatorname{im} f = \dim V = 4$.

(d) Er geldt $f(A_1) = A_1 + 2A_3$ en $f(A_2) = A_2 + 2A_4$ en $f(A_3) = A_3$ en $f(A_4) = A_4$. De rijtjes coëfficiënten ten opzichte van B van deze beelden geven de kolommen van $[f]_B^B$, dus we krijgen

$$[f]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Je zou deze matrix kunnen gebruiken om de opgaven (b),(c),(e) en (f) te beantwoorden, maar we geven nu een oplossing zonder deze matrix te gebruiken.

(e) Stel $\lambda \in \mathbb{R}$ is een eigenwaarde. Dan is er een niet-nul matrix $M \in V$ met $f(M) = \lambda M$. Zij v_1 de eerste rij van M en v_2 de tweede. Dan volgt

$$\begin{pmatrix} - & v_1 & - \\ - & v_2+2v_1 & - \end{pmatrix} = f(M) = \lambda M = \begin{pmatrix} - & \lambda v_1 & - \\ - & \lambda v_2 & - \end{pmatrix}$$

en dus $v_1 = \lambda v_1$ en $v_2 + 2v_1 = \lambda v_2$. Uit de eerste vergelijking volgt $\lambda = 1$ of $v_1 = 0$. In het laatste geval volgt $v_2 \neq 0$, dus volgt uit de tweede vergelijking alsnog $\lambda = 1$. In alle gevallen geldt dus $\lambda = 1$.

(f) Stel f is diagonaliseerbaar. Dan zou er een basis (M_1, M_2, M_3, M_4) van eigenvectoren zijn. Omdat er maar één eigenwaarde is, namelijk $\lambda = 1$, zou voor elk van deze basisvectoren geldt $f(M_i) = M_i$. Dat impliceert dat voor elke matrix M zou gelden $f(M) = M$, wat duidelijk niet het geval is (neem bijvoorbeeld maar $M = A_1$). De afbeelding f is dus niet diagonaliseerbaar.

5. Zij $\mathbb{R}[x]$ de vectorruimte van alle polynomen in de variabele x met reële coëfficiënten. Voor elk polynoom $f \in \mathbb{R}[x]$ en elk geheel getal $k \geq 0$ noteren we de k-de afgeleide van f als $f^{(k)}$. Er geldt dus $f^{(0)} = f$ en $f^{(1)} = f'$ en $f^{(2)} = f''$, etcetera. Bewijs dat er een polynoom $f \in \mathbb{R}[x]$ van graad hooguit 2015 bestaat zodanig dat $f \neq 0$ en voor elke $k \in \{0, 1, \ldots, 2014\}$ geldt $f^{(k)}(k) = 0$.

Antwoord.

Zij $V \subset \mathbb{R}[x]$ de deelruimte van polynomen van graad hooguit 2015. Dan geldt $\dim V = 2016$. De afbeelding $D\colon V \to V$ die de afgeleide neemt is lineair, dus zo ook de samenstelling van deze afbeelding met zichzelf en dus ook de afbeelding $D^k\colon V \to V$ die f stuurt naar $f^{(k)}$. De afbeelding $\mathrm{ev}_k\colon V \to \mathbb{R}$ die elk polynoom f evalueert in k (dus $\mathrm{ev}_k(f) = f(k)$) is ook lineair, dus ook de samenstelling $g_k = \mathrm{ev}_k \circ D^k\colon V \to \mathbb{R}$ die f stuurt naar $f^{(k)}(k)$. Definieer daarmee de afbeelding

$$G\colon V \to \mathbb{R}^{2015},\ f \mapsto (g_0(f), g_1(f), \ldots, g_{2014}(f)).$$

Dan zijn de polynomen die we zoeken precies die polynomen f waarvoor geldt $f \in \ker G$. Wegens de dimensie-formule voor G geldt

$$\dim \ker G + \dim \operatorname{im} G = \dim V = 2016.$$

Omdat $\operatorname{im} G \subset \mathbb{R}^{2015}$ geldt er $\dim \operatorname{im} G \leq 2015$, dus volgt ook $\dim \ker G \geq 2016 - 2015 = 1$. Dat betekent dat $\ker G$ een niet-nul polynoom bevat en elk zo'n polynoom voldoet aan onze eisen.