Tentamen Lineaire Algebra 1 (**Wiskundigen**)

Donderdag, 23 januari 2014, 10.00-13.00

Geen rekenmachines. **<u>Motiveer elk antwoord</u>.**

Voor dit tentamen zijn 45 punten te behalen. Uitwerkingen staan vandaag op de website.
Het nagekeken tentamen kan worden ingezien op dinsdag, 4 februari, 11.00-12.00.

1. (12pt) Voor alle reële getallen a definiëren we de matrix C_a als

$$C_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & a & 2 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verder definiëren we

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal voor alle reële waarden van a de rang van de matrix C_a.

(b) Is C_a inverteerbaar voor $a = 0$? Zo nee, geef aan waarom niet; zo ja, geef de inverse.

(c) Voor welke $a \in \mathbb{R}$ heeft de vergelijking $C_a \cdot x = v$ precies één oplossing x in $\mathbb{R}^3$?

(d) Beschrijf de volledige oplossingsverzameling van de vergelijking $C_a \cdot x = v$ voor $a = -1$.

2. (9pt.) Zij A de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal alle eigenwaarden van A en bepaal voor elke eigenwaarde een basis voor de bijbehorende eigenruimte.

(b) Bepaal een diagonaalmatrix D en een inverteerbare matrix P zodanig dat geldt $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

(c) Bereken A^{2014}. In je antwoord mag je uitdrukkingen zoals 7^{2014} laten staan.

3. (6pt.) Zij $U \subset \mathbb{R}^3$ het vlak door $(0,0,0)$ dat loodrecht staat op de vector $a = (-1,2,1)$. Zij $V \subset \mathbb{R}^3$ het vlak opgespannen door $v = (1,2,0)$ en $w = (2,2,1)$, dus

$$V = \{\, \lambda v + \mu w \;:\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \,\}.$$

Bepaal een basis voor de doorsnede $U \cap V$.

Zie andere kant van dit blad voor meer opgaven

4. (12pt.) Zij $V = \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ de reële vectorruimte van alle 2×2 matrices. Definiëer

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dan is $B = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ een basis voor V (dit hoef je niet te bewijzen). Zij $f \colon V \to V$ de elementaire rij-operatie die 2 keer de eerste rij bij de tweede optelt. Voor

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{geldt dus} \qquad f(M) = \begin{pmatrix} a & b \\ c + 2a & d + 2b \end{pmatrix}.$$

(a) Laat zien dat f een lineaire afbeelding is.

(b) Is f een isomorfisme?

(c) Wat is de rang van f?

(d) Bepaal de matrix $[f]_B^B$.

(e) Laat zien dat $\lambda = 1$ de enige eigenwaarde van f is.

(f) Is f diagonaliseerbaar?

5. (6pt.) Zij $\mathbb{R}[x]$ de vectorruimte van alle polynomen in de variabele x met reële coëfficiënten. Voor elk polynoom $f \in \mathbb{R}[x]$ en elk geheel getal $k \geq 0$ noteren we de k-de afgeleide van f als $f^{(k)}$. Er geldt dus $f^{(0)} = f$ en $f^{(1)} = f'$ en $f^{(2)} = f''$, etcetera. Bewijs dat er een polynoom $f \in \mathbb{R}[x]$ van graad hooguit 2015 bestaat zodanig dat $f \neq 0$ en voor elke $k \in \{0, 1, \ldots, 2014\}$ geldt $f^{(k)}(k) = 0$.