Hertentamen Lineaire Algebra 1 (**Wiskundigen**)

Maandag, 10 maart 2014, 14.00-17.00

Geen rekenmachines. Motiveer elk antwoord.

Voor dit tentamen zijn 45 punten te behalen.
Op de website zal zodra het tentamen is nagekeken ook vermeld worden wanneer het tentamen kan worden ingezien.

1. (12pt) Voor alle reële getallen a definiëren we de matrix C_a als

$$C_a = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 \\ 3 & a & 2 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verder definiëren we

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal voor alle reële waarden van a de rang van de matrix C_a.

(b) Is C_a inverteerbaar voor $a = 0$? Zo nee, geef aan waarom niet; zo ja, geef de inverse.

(c) Voor welke $a \in \mathbb{R}$ heeft de vergelijking $C_a \cdot x = v$ precies één oplossing x in $\mathbb{R}^3$?

(d) Beschrijf de volledige oplossingsverzameling van de vergelijking $C_a \cdot x = v$ voor $a = 1$.

2. (9pt.) Zij A de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal alle eigenwaarden van A en bepaal voor elke eigenwaarde een basis voor de bijbehorende eigenruimte.

(b) Bepaal een diagonaalmatrix D en een inverteerbare matrix P zodanig dat geldt $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

(c) Bereken A^{2014}. In je antwoord mag je uitdrukkingen zoals 7^{2014} laten staan.

3. (6pt.) Zij $U \subset \mathbb{R}^3$ het vlak door $(0, 0, 0)$ dat loodrecht staat op de vector $a = (-1, 0, 1)$.
Zij $L \subset \mathbb{R}^3$ de lijn opgespannen door $v = (1, 2, 0)$.
Bepaal een basis voor $(U \cap L^\perp)^\perp$.

Zie andere kant van dit blad voor meer opgaven

4. (11pt.) Zij V een eindig-dimensionale vectorruimte over $\mathbb{R}$.
Stel $f\colon V \to V$ is een lineaire afbeelding waarvoor geldt $f \circ f = f$.

(a) Laat zien dat elke eigenwaarde van f gelijk is aan 0 of aan 1.

(b) Laat zien dat de eigenruimte $E_0(f)$ gelijk is aan de kern van f.

(c) Laat zien dat de eigenruimte $E_1(f)$ gelijk is aan het beeld van f.

(d) Bewijs dat f diagonaliseerbaar is.

5. (7pt.) Zij $\mathbb{R}[x]$ de ruimte van alle polynomen met reële coëfficiënten in de variabele x. Voor elk polynoom $f \in \mathbb{R}[x]$ definiëren we

$$f_1 = f, \qquad f_2 = x \cdot f_1', \qquad f_3 = x \cdot f_2', \qquad \ldots, \qquad f_{n+1} = x \cdot f_n', \qquad \ldots.$$

Voor $f = x^3 - 5x^2 + 3x$ krijgen we bijvoorbeeld

$$\begin{aligned} f_1 &= x^3 - 5x^2 + 3x, \\ f_2 &= 3x^3 - 10x^2 + 3x, \\ f_3 &= 9x^3 - 20x^2 + 3x, \\ f_4 &= 27x^3 - 40x^2 + 3x, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Bewijs dat er een polynoom $f \in \mathbb{R}[x]$ van graad hooguit 2014 bestaat zodanig dat $f \neq 0$ en voor elke $k \in \{1, 2, \ldots, 2014\}$ geldt $f_k(k) = 0$.