Tentamen Lineaire Algebra 2

09-01-2003, 10.00-13.00 uur

I. (1,5 punten) Beschouw $\mathbb{R}^4$ met standaard coördinaten $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ en het standaard inprodukt, en de lineaire deelruimte

$$U = \{\ x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\ \}\ .$$

1. Bepaal de matrix van de orthogonale projektie op U.
2. Bereken de orthogonale projektie van de vektor $(1, 1, 2, 2)$ op het orthogonale komplement $U^\perp$.

II. (2 punten) Beschouw $\mathbb{C}^3$ met standaardbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$ en standaard inprodukt $\langle\ ,\ \rangle$. Bepaal alle lineaire afbeeldingen $T : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ die zowel aan 1. als ook aan 2. voldoen:

1. $T(e_1) = ie_2$ en $T(e_2) = e_3$.
2. T is normaal t.o.v. $\langle\ ,\ \rangle$.

Concludeer dat deze T's unitair zijn.

III. (2,5 punten) Beschouw op $\mathbb{R}^3$ de kwadratische vorm

$$f(x) = 5x_1^2 + 5x_2^2 - x_3^2 - 6x_1x_2\ .$$

1. Bepaal een hoofdassenvorm van f, en een orthonormale basis van $\mathbb{R}^3$ ten opzichte waarvan deze vorm wordt aangenomen.
2. Bepaal normaalvorm en type van het kwadratisch oppervlak in de $\mathbb{R}^3$ met vergelijking
$$5x_1^2 + 5x_2^2 - x_3^2 - 6x_1x_2 + 2\sqrt{2}x_1 + 2\sqrt{2}x_2 + 2 = 0\ .$$

Opgaven IV. en V. z.o.z.

IV. (3 punten) Bepaal een Jordan-normaalvorm en een Jordanbasis voor de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

V. (4 punten) Laat A, B twee reële $(n \times n)$-matrices zijn.

1. Stel dat $A \cdot B = B \cdot A$, en laat λ een eigenwaarde van A zijn. Bewijs dat de eigenruimte $\mathrm{Eig}_A(\lambda)$ een B-invariante deelruimte van $\mathbb{R}^n$ is, d.w.z. voor alle $x \in \mathrm{Eig}_A(\lambda)$ geldt $B \cdot x \in \mathrm{Eig}_A(\lambda)$.

2. Stel nu dat A en B symmetrisch zijn. Bewijs dat de volgende twee uitspraken equivalent zijn:

   (a) $A \cdot B = B \cdot A$

   (b) A en B zijn simultaan orthogonaal diagonaliseerbaar; d.w.z. er is een orthogonale $(n \times n)$-matrix C zodat $C^{-1} \cdot A \cdot C$ en $C^{-1} \cdot B \cdot C$ beide diagonaal zijn.

♣ ♢ ♡ ♠ ♠ ♡ ♢ ♣ ♣ ♢ ♡ ♠ ♠ ♡ ♢ ♣

Cijfer $\geq$ max{1,min{10, aantal behaalde punten}}