Tentamen Lineaire Algebra 2

09-01-2003, 10.00-13.00 uur

I. (1,5 punten) Beschouw $\mathbb{R}^4$ met standaard coördinaten $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ en het standaard inprodukt, en de lineaire deelruimte

$$U = \{\ x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\ \}\ .$$

1. Bepaal de matrix van de orthogonale projektie op U.
2. Bereken de orthogonale projektie van de vektor $(1, 1, 2, 2)$ op het orthogonale komplement $U^\perp$.

Oplossing: 1. Een basis van U is $(1, 0, -1, 0)$, $((0, 1, 0, -1)$. Definieer

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ;$$

dan is de matrix van de orthogonale projektie p_U op U

$$\begin{aligned} P_U &= A(A^tA)^{-1}A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

2. Er geldt $p_{U^\perp} = \mathrm{id} - p_U$, dus

$$P_{U^\perp} = I_4 - P_U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

dus $p_{U^\perp}(1, 1, 2, 2) = \frac{1}{2}(3, 3, 3, 3)$.

II. (2 punten) Beschouw $\mathbb{C}^3$ met standaardbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$ en standaard inprodukt $\langle\ ,\ \rangle$. Bepaal alle lineaire afbeeldingen $T : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ die zowel aan 1. als ook aan 2. voldoen:

1. $T(e_1) = ie_2$ en $T(e_2) = e_3$.
2. T is normaal t.o.v. $\langle\ ,\ \rangle$.

Concludeer dat deze T's unitair zijn.

Oplossing: Wegens 1. heeft de matrix A van zo'n T de vorm $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ i & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$. T is normaal d.e.s.d. als A normaal d.e.s.d als $A^*A = AA^*$ waarbij $A^* = \bar{A}^t$. We hebben

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -ib \\ 0 & 1 & c \\ i\bar{b} & \bar{c} & a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{c} \end{pmatrix} \quad , \quad AA^* = \begin{pmatrix} a\bar{a} & a\bar{b} & a\bar{c} \\ b\bar{a} & 1 + b\bar{b} & b\bar{c} \\ c\bar{b} & c\bar{b} & 1 + c\bar{c} \end{pmatrix} \ ;$$

deze twee zijn gelijk d.e.s.d. als $a\bar{a} = |a|^2 = 1$ en $b = c = 0$. De gevraagde T's zijn dus die met matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $|a| = 1$, en zij zijn unitair omdat deze A's unitaire matrices zijn.

III. (2,5 punten) Beschouw op $\mathbb{R}^3$ de kwadratische vorm

$$f(x) = 5x_1^2 + 5x_2^2 - x_3^2 - 6x_1x_2 \ .$$

1. Bepaal een hoofdassenvorm van f, en een orthonormale basis van $\mathbb{R}^3$ ten opzichte waarvan deze vorm wordt aangenomen.
2. Bepaal normaalvorm en type van het kwadratisch oppervlak in de $\mathbb{R}^3$ met vergelijking
$$5x_1^2 + 5x_2^2 - x_3^2 - 6x_1x_2 + 2\sqrt{2}x_1 + 2\sqrt{2}x_2 + 2 = 0 \ .$$

Oplossing: 1. De bij f horende symmetrische matrix is $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ met karakteristiek polynoom $-(\lambda-2)(\lambda-8)(\lambda+1)$, dus met eigenwaarden $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$. Een ONB van $\mathbb{R}^3$ bestaande uit eigenvektoren van A is

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bij } \lambda_1 \ , \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bij } \lambda_2 \ , \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bij } \lambda_3.$$

T.o.v. deze basis wordt de hoofdassenvorm $f(y) = 8y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2$ aangenomen.

2. Door de coördinatentransformatie

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 + y_2) \quad , \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-y_1 + y_2) \quad , \quad x_3 = y_3$$

krijgen we de normaalvorm

$$\begin{aligned} 5x_1^2 + 5x_2^2 - x_3^2 - 6x_1x_2 + 2\sqrt{2}x_1 + 2\sqrt{2}x_2 + 2 &= 8y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2 + 4y_2 + 2 \\ &= 8y_1^2 + 2(y_2+1)^2 - y_3^2 \ ; \end{aligned}$$

dit is een kegel.

IV. (3 punten) Bepaal een Jordan-normaalvorm en een Jordanbasis voor de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

Oplossing: Het karakteristieke polynoom van A is $-(\lambda - 2)^3(\lambda - 4)^2$, dus heeft A de twee eigenwaarden $\lambda_1 = 2$ en $\lambda_2 = 4$.
De rang van

$$A - 2I_5 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

is 4, dus de meetkundige multipliciteit van λ_1 is $m_g(2) = 5 - 4 = 1$. Dit betekent dat er één Jordanblok bij λ_1 is, en wel een (3×3)-blok omdat de algebraïsche multipliciteit $m_a(2) = 3$ is.
De rang van

$$A - 4I_5 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

is ook 4, dus de meetkundige multipliciteit van λ_2 is $m_g(4) = 5 - 4 = 1$. Dit betekent dat er één Jordanblok bij λ_2, en wel een (2×2)e-blok omdat de algebraïsche multipliciteit

$m_a(4) = 2$ is.
Conclusie: Een Jordan-normaalvorm voor A is

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

Een basis $\{b_1, b_2, \ldots, b_5\}$ is een Jordanbasis voor A die deze Jordan-normaalvorm geeft indien

$$(A - 2I_5)^2 b_3 \neq 0 \ , \ (A - 2I_5)^3 b_3 = 0 \ , \ b_2 = (A - 2I_5) b_3 \ , \ b_1 = (A - 2I_5)^2 b_3$$

en

$$(A - 4I_5) b_5 \neq 0 \ , \ (A - 4I_5)^2 b_5 = 0 \ , \ b_4 = (A - 4I_5) b_5 \ .$$

We hebben

$$(A - 2I_5)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \ , \ (A - 2I_5)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} ;$$

er geldt dus $(A - 2I_5)^2 e_3 \neq 0$, $(A - 2I_5)^3 e_3 = 0$ waarbij e_3 de derde eenheidsvektor is. Daarom kunnen we kiezen

$$b_3 = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ b_2 = (A - 2I_5) e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ b_1 = (A - 2I_5)^2 e_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

We hebben

$$(A - 4I_5)^2 = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;$$

dus kunnen we kiezen

$$b_5 = e_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ b_4 = (A - 4I_5) e_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

V. (4 punten) Laat A, B twee reële $(n \times n)$-matrices zijn.

1. Stel dat $A \cdot B = B \cdot A$, en laat λ een eigenwaarde van A zijn. Bewijs dat de eigenruimte $\mathrm{Eig}_A(\lambda)$ een B-invariante deelruimte van $\mathbb{R}^n$ is, d.w.z. voor alle $x \in \mathrm{Eig}_A(\lambda)$ geldt $B \cdot x \in \mathrm{Eig}_A(\lambda)$.

2. Stel nu dat A en B symmetrisch zijn. Bewijs dat de volgende twee uitspraken equivalent zijn:

   (a) $A \cdot B = B \cdot A$

   (b) A en B zijn simultaan orthogonaal diagonaliseerbaar; d.w.z. er is een orthogonale $(n \times n)$-matrix C zodat $C^{-1} \cdot A \cdot C$ en $C^{-1} \cdot B \cdot C$ beide diagonaal zijn.

♣ ♢ ♡ ♠ ♠ ♡ ♢ ♣ ♣ ♢ ♡ ♠ ♠ ♡ ♢ ♣

Cijfer $\geq$ max{1,min{10, aantal behaalde punten}}