Hertentamen Lineaire Algebra 2

05-08-2003

I. (1.5 punten) We beschouwen $\mathbb{R}^4$ met standaard coördinaten $(x_1, \ldots, x_4)$ en het standaard inprodukt, en de lineaire deelruimte $U = \{\ x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = x_3 - x_4 = 0\ \}$.

1. Bepaal de matrix van de orthogonale projektie op U.
2. Bereken de orthogonale projektie van de vektor $(1, 2, 3, 4)$ op het orthogonale komplement $U^\perp$ van U.

II. (2 punten) Beschouw $\mathbb{C}^3$ met standaardbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$ en standaard inprodukt $\langle\ ,\ \rangle$. Bepaal alle lineaire afbeeldingen $T : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ die zowel aan 1. als ook aan 2. voldoen:

1. $T(e_1) = ie_2$ en $\langle T(e_2), e_2\rangle = \langle T(e_3), e_3\rangle = 0$.
2. T is hermites t.o.v. $\langle\ ,\ \rangle$.

Laat zien dat geen van deze T's unitair is.

III. (2,5 punten) Beschouw op $\mathbb{R}^3$ de kwadratische vorm

$$f(x) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 - 2\sqrt{2}x_1x_2 \ .$$

1. Bepaal een hoofdassenvorm van f, en een orthonormale basis van $\mathbb{R}^3$ ten opzichte waarvan deze vorm wordt aangenomen.
2. Bepaal normaalvorm en type van het kwadratisch oppervlak in de $\mathbb{R}^3$ met vergelijking
$$3x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 6x_2 + 2 = 0 \ .$$

IV. (3 punten) Bepaal een Jordan-normaalvorm en een Jordanbasis voor de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Opgave V. z.o.z.

V. (4 punten) Laat $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ een eindigdimensionale reële vektorruimte met inprodukt zijn, en $T : V \longrightarrow \mathbb{R}$ een lineaire afbeelding. Het is een (hier niet te bewijzen) feit dat er een unieke $v_T \in V$ bestaat zodat $T(v) = \langle v, v_T \rangle$ voor alle $v \in V$.

Beschouw nu de (oneindigdimensionale) reële vektorruimte

$$V := \{\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{R} \text{ voor alle } n \in \mathbb{N}\ ,\ x_n = 0 \text{ voor alle behalve eindig veel } n \in \mathbb{N}\ \}$$

met optelling en scalaire vermenigvuldiging

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}} := (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad , \quad \lambda \cdot (x_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}} \ .$$

1. Laat zien dat een inprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ in V wordt gedefinieerd door

   $$\langle x, y \rangle := \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n$$

   voor $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Geef een voorbeeld van een lineaire afbeelding $T : V \longrightarrow \mathbb{R}$ waarvoor <u>geen</u> vektor $v_T \in V$ bestaat met $T(v) = \langle v, v_T \rangle$ voor alle $v \in V$.

♣ ◇ ♡ ♠ ♠ ♡ ◇ ♣ ♣ ◇ ♡ ♠ ♠ ♡ ◇ ♣

Cijfer $\geq$ max{1,min{10, aantal behaalde punten}}