Hertentamen Lineaire Algebra 2

05-08-2003, 10.00-13.00 uur

I. (1.5 punten) We beschouwen $\mathbb{R}^4$ met standaard coördinaten $(x_1, \ldots, x_4)$ en het standaard inprodukt, en de lineaire deelruimte $U = \{ x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = x_3 - x_4 = 0 \}$.

1. Bepaal de matrix van de orthogonale projektie op U.
2. Bereken de orthogonale projektie van de vektor $(1, 2, 3, 4)$ op het orthogonale komplement $U^\perp$ van U.

Oplossing: 1. Een basis van U is $(1, -1, 0, 0)$, $((0, 0, 1, 1)$. Definieer

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ ;$$

dan is de matrix van de orthogonale projektie p_U op U

$$\begin{aligned} P_U &= A(A^tA)^{-1}A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

2. Er geldt $p_{U^\perp} = \mathrm{i}d - p_U$, dus

$$P_{U^\perp} = I_4 - P_U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} ,$$

dus $p_{U^\perp}(1, 2, 3, 4) = \frac{1}{2}(3, 3, -1, 1)$.

II. (2 punten) Beschouw $\mathbb{C}^3$ met standaardbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$ en standaard inprodukt $\langle\ ,\ \rangle$. Bepaal alle lineaire afbeeldingen $T : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ die zowel aan 1. als ook aan 2. voldoen:

1. $T(e_1) = ie_2$ en $< T(e_2), e_2 > = < T(e_3), e_3 > = 0$.
2. T is hermites t.o.v. $\langle\ ,\ \rangle$.

Laat zien dat geen van deze T's unitair is.

Oplossing: De matrix A van zo'n T heeft wegens 1. de vorm $A = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ i & 0 & d \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$. T is hermites d.e.s.d. als A hermites is, dus d.e.s.d. als

$$\begin{pmatrix} 0 & a & c \\ i & 0 & d \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} = A = A^* = \bar{A}^t = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ \bar{a} & 0 & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} & 0 \end{pmatrix}$$

dus d.e.s.d. als $a = -i$, $c = 0$, $d = \bar{b}$. De gevraagde T's zijn dus precies degene met matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & \bar{b} \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$, $b \in \mathbb{C}$, t.o.v. de standaardbasis.
De kolommen van zo'n A vormen geen orthonormale basis van $\mathbb{C}^3$, dus A en daarmee T is niet unitair.

III. (2,5 punten) Beschouw op $\mathbb{R}^3$ de kwadratische vorm

$$f(x) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 - 2\sqrt{2}x_1x_2 \ .$$

1. Bepaal een hoofdassenvorm van f, en een orthonormale basis van $\mathbb{R}^3$ ten opzichte waarvan deze vorm wordt aangenomen.
2. Bepaal normaalvorm en type van het kwadratisch oppervlak in de $\mathbb{R}^3$ met vergelijking

$$3x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 - 2\sqrt{2}x_1x_2 - 6x_3 + 2 = 0 \ .$$

Oplossing: 1. De bij f horende symmetrische matrix is $\begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ met karakteristiek polynoom $-(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 5)$, dus met eigenwaarden $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 5$.
Een ONB van $\mathbb{R}^3$ bestaande uit eigenvektoren van A is

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bij } \lambda_1 \ , \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bij } \lambda_2 \ , \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bij } \lambda_3.$$

T.o.v. deze basis wordt de hoofdassenvorm $f(y) = 2y_1^2 + 3y_2^2 + 5y_3^2$ aangenomen.
2. Door de coördinatentransformatie

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3 \quad , \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}y_3 \quad , \quad x_3 = y_2$$

krijgen we de normaalvorm

$$\begin{aligned} 3x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 - 2\sqrt{2}x_1x_2 - 6x_2 + 2 &= 2y_1^2 + 3y_2^2 + 5y_3^2 - 6y_2 + 2 \\ &= 2y_1^2 + 3(y_2-1)^2 + 5y_3^2 - 1 \ ; \end{aligned}$$

dit is een ellipsoïde.

IV. (3 punten) Bepaal een Jordan-normaalvorm en een Jordanbasis voor de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Het karakteristieke polynoom van A is $-(\lambda-2)^2(\lambda+2)^3$, dus heeft A de twee eigenwaarden $\lambda_1 = 2$ en $\lambda_2 = -2$.
De rang van $A - 2I_5$ is 4, dus de meetkundige multipliciteit van λ_1 is $5 - 4 = 1$, dus is er één Jordanblok bij λ_1, en wel en (2×2)-blok omdat de algebraïsche multipliciteit van λ_1 is.
De rang van $A+2I_5$ is 3, dus de meetkundige multipliciteit van λ_2 is $5 - 3 = 2$. Dit betekent dat er twee Jordanblokken bij λ_2 zijn, en wel één (1×1)-blok en één (2×2)-blok omdat de algebraïsche multipliciteit 3 is.
Conclusie: Een Jordan-normaalvorm voor A is

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} .$$

Een basis $\{b_1, b_2, \ldots, b_5\}$ is een Jordanbasis voor A die deze Jordan-normaalvorm geeft indien

$$b_1 = (A - 2I_5)b_2 \neq 0 \ , \ (A - 2I_5)^2 b_2 = 0$$

en

$$(A + 2I_5)^2 b_3 = 0 \ , \ b_4 = (A + 2I_5)b_5 \neq 0 \ , \ (A + 2I_5)^2 b_5 = 0 \ , \ b_3 \text{ en } b_4 \text{ lineair onafhankelijk} \ .$$

We hebben

$$(A-2I_5)=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \ , \ (A-2I_5)^2=\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 0 \\ -8 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \ ;$$

we kunnen dus kiezen $b_2 := e_2$, $b_1 := e_1 + e_5$, waarbij e_i de i-de eenheidsvektor is.
We hebben

$$(A+2I_5)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \ , \ (A+2I_5)^2=\begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \ ;$$

dus kunnen we kiezen $b_3 := e_1 - e_5$, $b_5 := e_4$, $b_4 := 2e_3$.

V. (4 punten) Laat $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ een eindigdimensionale reële vektorruimte met inprodukt zijn, en $T : V \longrightarrow \mathbb{R}$ een lineaire afbeelding. Het is een (hier niet te bewijzen) feit dat er een unieke $v_T \in V$ bestaat zodat $T(v) = \langle v, v_T \rangle$ voor alle $v \in V$.

Beschouw nu de (oneindigdimensionale) reële vektorruimte

$$V := \{\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{R} \text{ voor alle } n \in \mathbb{N}\ ,\ x_n = 0 \text{ voor alle behalve eindig veel } n \in \mathbb{N}\ \}$$

met optelling en scalaire vermenigvuldiging

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}} := (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad , \quad \lambda \cdot (x_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}} \ .$$

1. Laat zien dat een inprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ in V wordt gedefinieerd door

   $$\langle x, y \rangle := \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n$$

   voor $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Geef een voorbeeld van een lineaire afbeelding $T : V \longrightarrow \mathbb{R}$ waarvoor <u>geen</u> vektor $v_T \in V$ bestaat met $T(v) = \langle v, v_T \rangle$ voor alle $v \in V$.

♣ ◇ ♡ ♠ ♠ ♡ ◇ ♣ ♣ ◇ ♡ ♠ ♠ ♡ ◇ ♣

Cijfer $\geq$ max{1,min{10, aantal behaalde punten}}