TENTAMEN LINEAIRE ALGEBRA 2
6 januari 2004, 10.00-13.00.

Normering: 1: 4+8=12pt; 2: 4+2+6=12pt; 3: 11pt; 4: 5+5+5=15pt; 5: 3+4+3+3=13pt.

1. In $\mathbf{R}^4$ is W de lineaire deelruimte opgespannen door de vectoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a. Bepaal een basis van $W^\perp$.

b. Laat $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Schrijf $\mathbf{v}$ als $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{w}^\perp$ met $\mathbf{w} \in W$ en $\mathbf{w}^\perp \in W^\perp$.

2a. Voor welke $a \in \mathbf{R}$ is de kwadratische vorm $ax_1^2 - 12x_1x_2 - 2x_2^2$ in $\mathbf{R}^2$ positief definiet?

b. Beschouw de kegelsnede $K : 7x_1^2 - 12x_1x_2 - 2x_2^2 = 1$ in $\mathbf{R}^2$. Wat voor kegelsnede is K?

c. Bepaal een orthonormale basis van $\mathbf{R}^2$ zodat de vergelijking van K t.o.v. die basis een diagonaalvorm heeft (d.w.z. de vergelijking is $a_1(x_1')^2 + a_2(x_2')^2 = c$).

3a. $R : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ is een rotatie om de lijn $\ell = \text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ over een hoek van $\frac{\pi}{2}$.

Bepaal de matrix van R t.o.v. de standaardbasis (er zijn twee mogelijkheden; het is voldoende één van beide oplossingen te geven).

4. Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Bepaal de eigenwaarden van A en de bijbehorende eigenruimten.

b. Bepaal een Jordan-normaalvorm van A.

c. Bepaal een Jordanbasis voor de matrix A in $\mathbf{C}^5$.

Opgave 5 staat op de volgende bladzijde.

5. Beschouw de lineaire afbeelding $T : \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^n$ gegeven door $T(\mathbf{x}) =< \mathbf{a}, \mathbf{x} > \mathbf{b}$ waarbij $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{C}^n$ met $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. $<,>$ is het standaard-hermitese inproduct op $\mathbf{C}^n$.

a. Bepaal de eigenwaarden en de bijbehorende eigenruimten van T.

b. Laat zien dat T diagonalizeerbaar is dan en slechts dan als $< \mathbf{a}, \mathbf{b} > \neq 0$.

c. Laat zien dat de geadjungeerde afbeelding gegeven wordt door $T^*(\mathbf{x}) =< \mathbf{b}, \mathbf{x} > \mathbf{a}$.

d. Bewijs dat T normaal is dan en slechts dan als $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ lineair afhankelijk zijn.

TENTAMEN LINEAIRE ALGEBRA 2, 06-01-2004. Antwoorden.

1a. $W^\perp$ wordt gegeven door de vergelijkingen $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + y_1 - x_4 = 0 \end{cases}$. Een mogelijke basis is $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

b. Bepaal een orthonormale basis voor W m.b.v. Gram-Schmidt:
$\{b_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ Nu is

$$\mathbf{w} = <\mathbf{v}, b_1> b_1 + <\mathbf{v}, b_2> b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en } \mathbf{w}^\perp = \mathbf{v} - \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Anders: laat $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Dan is $\mathbf{w} = P_W(\mathbf{v})$ en de matrix van P_W is
$A(A^TA)^{-1}A^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2a. Laat A de bijbehorende symmetrische matrix zijn: $A = \begin{pmatrix} a & -6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$ Dan moet gelden: $\det(A_1) = a > 0$ en $\det(A) = -2a - 36 > 0$, dus er zijn geen a zodat A positief definiet.

b. De bijbehorende matrix A is indefiniet dus K is een hyperbool.

c. De basis is een (orthonormale) basis van eigenvectoren van A (met $a = 7$): dit is de basis $\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. Immers, als U een orthogonale matrix is van eigenvectoren van A en D de diagonaalmatrix met de eigenwaarden, dan is $\mathbf{x}^TA\mathbf{x} = \mathbf{x}'^TU^TAU\mathbf{x}' = \mathbf{x}'^TD\mathbf{x}'$ voor $U\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ en U is dus de basistransformatiematrix M_E^B met E de standaardbasis en B de orthonormale basis van eigenvectoren.

3. Laat R_E^E de matrix t.o.v. de standaardbasis zijn en laat R_B^B de matrix t.o.v. een geschikte andere basis zijn. Dan geldt: $R_E^E = M_E^B R_B^B M_B^E$ waarbij M_E^B en $M_B^E = (M_E^B)^{-1}$ de basistransformatiematrices zijn. Een geschikte basis is

$\{\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 0 \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 0 \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}\}$. Dan geldt

$$R_E^E = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & -2/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\pm 1) \\ 0 & \pm 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/5 & 2/\sqrt{5} & 2/5 \\ -2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 2/5 & -1/\sqrt{5} & 4/5 \end{pmatrix}, \text{ resp. } \begin{pmatrix} 1/5 & -2/\sqrt{5} & 2/5 \\ 2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} \\ 2/5 & 1/\sqrt{5} & 4/5 \end{pmatrix}.$$

Omdat M_E^B orthogonaal is, is $M_B^E = (M_B^E)^T$. (Een andere keuze van de basis B geeft wat meer werk in het uitrekenen van M_B^E). Een tweede manier is, de beelden van de vectoren van een basis te bepalen. Neem dezelfde basis als boven. Dan geldt: $R(\mathbf{b}_1) = \mathbf{b}_1$, $R(\mathbf{b}_2) = \pm\mathbf{b}_3$, $R(\mathbf{b}_3) = - \pm \mathbf{b}_2$. Dus voor de standaardmatrix M_R van R geldt:

$$M_R B := M_R(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = (\mathbf{b}_1, \pm\mathbf{b}_3, - \pm \mathbf{b}_2) =: B', \qquad \text{dus } M_R = B'B^{-1}.$$

4a. Het karakteristieke polynoom van A is $(X-1)^5$ (A is een bovendriehoeksmatrix). De eigenruimte bij e.w. 1 heeft dimensie 3 en wordt opgespannen door de vectoren $e_1, e_2 + e_4, e_2 - e_5$.

b. $(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ heeft rang 1 en $\mathrm{Ker}(A-I)^2 = \{\mathbf{x} : x_3 = 0\}$.
Tenslotte is $(A-I)^3 = 0$. Er zijn dus $\dim \mathrm{Ker}(A-I) = 3$ Jordanblokken, waarvan 1 van afmeting 3 (immers $\dim \mathrm{Ker}(A-I)^2 = 4$ en $\dim \mathrm{Ker}(A-I)^3 = 5$ dus er is $4-3=1$ Jordanblok van dimensie ≥ 2 en $5-4=1$ Jordanblok van dimensie minstens 3), en de Jordan-normaalvorm is dan $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c. Een Jordanbasis is (bijvoorbeeld) $\{e_3, (A-I)e_3 = e_1 - e_2, (A-I)^2 e_3 = -e_1, e_2 + e_4, e_2 - e_5\}$. Immers e_3 is een vector die in $\mathrm{Ker}(A-I)^3$ ligt maar niet in $\mathrm{Ker}(A-I)^2$, en de drie vectoren $(A-I)^2 e_3 = e_1$ en $e_2 + e_4, e_2 - e_5$ vormen een basis van $\mathrm{Ker}(A-I)$.

5a. $T(x) = \lambda x$ als $< a, x >= 0$ (dus $x \in (\mathrm{span}\{a\})^\perp$ - dan is de eigenwaarde 0) of als $x = b$ (dan is de eigenwaarde $< a, b >$).

b. De eigenruimte bij 0, $(\mathrm{span}\{a\})^\perp$, heeft dimensie $n-1$. Als $< a, b >= 0$ dan is ook b eigenvector met e.w. 0 en er zijn verder geen eigenwaarden. Er is dus geen basis van eigenvectoren. Als $< a, b > \neq 0$ dan wordt een basis van eigenvectoren gegeven door een basis van $(\text{span}\{a\})^{\perp}$, samen met de vector b.

c. $T(x) =< a, x > b = (ba^*)x$. Dus $T^*(x) = (ba^*)^*x = (ab^*)x =< b, x > a$.

d. T is normaal als er een orthogonale basis van eigenvectoren bestaat. Uit (a) weten we dat dan $< a, b > \neq 0$ en b moet orthogonaal zijn met de eigenruimte $(\text{span}\{a\})^{\perp}$. Dit is precies het geval als a en b lineair afhankelijk zijn.

TENTAMEN LINEAIRE ALGEBRA 2
15 maart 2004, 14.00-17.00.

---

1. Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Bepaal een QR-factorisatie van A, m.a.w. schrijf A als het product van een orthogonale matrix Q en een bovendriehoeksmatrix R. (8 pt)

b. In hoeverre is de QR-factorisatie van A uniek? Verklaar je antwoord. (4 pt)

2. De kegelsnede $K \subset \mathbf{R}^2$ is gegeven door de vergelijking $2x^2 + 2y^2 - 5xy - 3y - 2 = 0$.

a. Wat voor type kegelsnede is K? (2 pt)

b. Bepaal een orthonormale basis van $\mathbf{R}^2$ zodat (het kwadratische deel van) de vergelijking van K t.o.v. deze basis een diagonaalvorm heeft. (4 pt)

c. Toon aan dat K in feite de vereniging is van twee rechte lijnen en bepaal de vergelijkingen van de lijnen. Hoe verhoudt dit resultaat zich tot je antwoord in (a)? (6 pt)

3. Zij $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ de (loodrechte) spiegeling in het vlak $V = \text{ span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$.

Bepaal de matrix van S t.o.v. de standaardbasis. (8 pt)

4. Beschouw de matrix $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Bepaal de eigenwaarden van B en de bijbehorende eigenruimten. (6 pt)

b. Bepaal een Jordan-normaalvorm van B. (5 pt)

c. Bepaal een Jordanbasis van B in $\mathbf{C}^5$. (5 pt)

5. Een vierkante complexe matrix A heet normaal als $AA^* = A^*A$, waarbij A^* de geadjungeerde van A voorstelt.

Bewijs: Een $n \times n$-matrix A is normaal dan en slechts dan als $\|A\mathbf{x}\| = \|A^*\mathbf{x}\|$ voor alle $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^n$. (6 pt)

TENTAMEN LINEAIRE ALGEBRA 2
30 augustus 2004, 14.00-17.00.

---

1. In $\mathbf{R}^4$ is W de lineaire deelruimte opgespannen door de vectoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a. Bepaal een basis van $W^\perp$. (4pt)

b. Laat $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Schrijf $\mathbf{v}$ als $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{w}^\perp$ met $\mathbf{w} \in W$ en $\mathbf{w}^\perp \in W^\perp$. (8pt)

2. Beschouw de matrix $Q = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ -2 & b & 1 \\ c & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Bepaal $a, b, c \in \mathbf{R}$ zodat Q orthogonaal is. (4 pt)

Laat nu a, b, c als in (a).

b. Ga na of Q de standaardmatrix van een rotatie of een draaispiegeling is. (2 pt)

c. Bepaal de draaiingsas en de cosinus van de draaiingshoek. (6 pt)

3. Beschouw de kegelsnede K in $\mathbf{R}^2$ met vergelijking $3x^2 + 8xy - 3y^2 - 10y = 3$.

a. Wat voor type kegelsnede is K? (2 pt)

b. Bepaal een orthonormale basis van $\mathbf{R}^2$ zodat (het kwadratische deel van) de vergelijking van K t.o.v. deze basis een diagonaalvorm heeft. (4 pt)

c. Toon aan dat K in feite de vereniging is van twee rechte lijnen en bepaal de vergelijkingen van de lijnen. (4 pt)

De laatste twee opgaven staan op de volgende bladzijde.

4. Beschouw de matrix $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Bepaal een Jordan-normaalvorm en een Jordanbasis van B. Hierbij mag gebruikt worden dat $\chi_B(X) = X^4 - X^5$ (dit hoeft niet te worden aangetoond). (12 pt)

5. Beschouw de lineaire afbeelding $U : \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$ gegeven door $U(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - i < \mathbf{n}, \mathbf{x} > \mathbf{n}$. Hierbij is $<\ ,\ >$ het standaard-hermites inproduct op $\mathbf{C}^3$ en $\mathbf{n} \in \mathbf{C}^3$ zodat $< \mathbf{n}, \mathbf{n} >= 1$.

a. Laat zien dat de geadjungeerde afbeelding wordt gegeven door $U^*(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + i < \mathbf{n}, \mathbf{x} > \mathbf{n}$. (5 pt)

b. Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van U. (4 pt)

c. Bewijs dat U een normale afbeelding is. (3 pt)

d. Is U unitair? Motiveer je antwoord. (3 pt)