TENTAMEN LINEAIRE ALGEBRA 2
10 januari 2005, 14.00 - 17.00 uur.

Studenten wiskunde maken de opgaven 1,2,3,4A en 5. Studenten van andere studierichtingen maken dezelfde opgaven, maar mogen kiezen voor 4B i.p.v. 4A. **Geef duidelijk aan welke opgave je kiest!** Vergeet niet je studierichting te vermelden.

---

1. Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van A en geef van elke eigenwaarde de algebraïsche en meetkundige multipliciteit. (12 pt)

b. Bepaal een Jordan-normaalvorm van A en geef tevens het minimumpolynoom van A. (10 pt)

2. De e-macht van een matrix speelt een rol bij het oplossen van een stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten. Een stelsel als

$$\begin{cases} x_1'(t) & = & 4x_2(t) \\ x_2'(t) & = & -4x_1(t) \end{cases}$$

kunnen we schrijven in de vorm $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ met $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ en A een 2×2-matrix. De oplossing is dan van de vorm $\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{x}(0)$ voor $t \in \mathbf{R}$.

a. Bepaal een diagonaalmatrix D en een unitaire matrix U zodanig dat $A = UDU^{-1}$. Laat ook zien dat de gevonden matrix U inderdaad unitair is. (10 pt)

b. Bewijs dat $e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos 4t & \sin 4t \\ -\sin 4t & \cos 4t \end{pmatrix}$ voor $t \in \mathbf{R}$. (6 pt)

3. Beschouw de afbeelding $T : \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$ gegeven door $T(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{a})\mathbf{b} + (\mathbf{x}, \mathbf{b})\mathbf{a}$. Hierbij zijn $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{C}^3$ zodanig dat $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = (\mathbf{b}, \mathbf{b}) = 1$ en $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ en $(\ ,\ )$ is het standaard-hermitese inproduct op $\mathbf{C}^3$.

a. Laat zien dat T een zelfgeadjungeerde lineaire afbeelding is. (5 pt)

b. Bepaal de matrix van T t.o.v. een zelfgekozen basis. (7 pt)

c. Bepaal de eigenwaarden en bepaal een orthonormale basis van eigenvectoren van T. (10 pt)

4A. (Voor studenten wiskunde; andere studenten kunnen kiezen uit 4A of 4B. Geef duidelijk aan voor welke van beide opties je kiest.)

V is in deze opgave een eindig-dimensionale complexe vectorruimte met hermites inproduct $(\ ,\ )$. Voor $\mathbf{v} \in V$ is de afbeelding $i_{\mathbf{v}} \in V'$ gedefinieerd door $i_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{v})$ (voor $\mathbf{x} \in V$). De afbeelding $i : V \to V'$ beeldt $\mathbf{v} \in V$ af op $i_{\mathbf{v}} \in V'$.

a. Bewijs dat i een antilineaire bijectie is van V op V'. (6 pt)

b. Bewijs dat $\|i_{\mathbf{v}}\| = \|\mathbf{v}\|$. Hierbij is de norm van $\mathbf{v}$ de norm geïnduceerd door het inproduct en $\|i_{\mathbf{v}}\|$ de afbeeldingsnorm $\max_{\|\mathbf{x}\|=1} |i_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})|$. (7 pt)

Op V' is een hermites inwendig product gedefinieerd d.m.v. $(i_{\mathbf{v}}, i_{\mathbf{w}}) = (\mathbf{w}, \mathbf{v})$ voor $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ (dat dit inderdaad een hermites inproduct is hoeft niet te worden aangetoond). Verder is $T : V \to V$ een lineaire afbeelding en $T' : V' \to V'$ is de getransponeerde van T.

c. Bewijs dat $T'(i_{\mathbf{v}}) = i_{T^*\mathbf{v}}$ en toon aan dat T' normaal is dan en slechts dan als T normaal is. (7 pt)

4B. (Studenten wiskunde behoeven deze opgave niet te maken. Andere studenten kiezen deze opgave of opgave 4A. Geef duidelijk aan voor welke van beide opties je kiest.)

a. $H \subset \mathbf{R}^4$ is het 2-vlak $\begin{cases} x_1 + x_3 &= 0 \\ x_2 - x_4 &= 0 \end{cases}$. Bepaal de afstand in $\mathbf{R}^4$ tussen het punt $(1,1,1,1)$ en H. (12 pt)

b. Zij $U : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ een unitaire afbeelding. Bewijs de volgende beweringen: (8 pt)
   1. Alle eigenwaarden van U liggen op de eenheidscirkel $|z| = 1$ in $\mathbf{C}$.
   2. $|\det(U)| = 1$.

5. Zij $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ een orthonormale basis van $\mathbf{C}^n$.

Bewijs dat voor een vector $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^n$ geldt dat

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = |(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1)|^2 + |(\mathbf{x}, \mathbf{v}_2)|^2 + \ldots + |(\mathbf{x}, \mathbf{v}_n)|^2.$$

Hierbij stelt $(\ ,\ )$ het standaard-hermites inproduct voor. (10 pt)

ANTWOORDEN.

1a. Het karakteristieke polynoom is $(X-2)^4$. De enige eigenwaarde van A is dus 2 met algebraïsche multipliciteit 4. De eigenruimte bij de e.w. 2 is de nulruimte van $A-2I$ en is gelijk aan het opspansel van $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$. De meetkundige multipliciteit is dus 2.

b. Uit a volgt dat er twee Jordanblokken zijn bij de e.w. 2. Om de grootten van deze blokken te bepalen bekijken we $(A-2I)^2 = \begin{pmatrix}0&2&0&0\\0&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$. De rang van $(A-2I)^2$ is 1 dus het aantal Jordanblokken van grootte minstens 2 is

$$\dim\ \mathrm{Ker}(A-2I)^2 - \dim\ \mathrm{Ker}(A-2I) = 3-2 = 1.$$

Er is dus een Jordanblok van grootte 1 en het andere Jordanblok heeft dan grootte 3. Een Jordan-normaalvorm is dus $\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$. Het minimumpolynoom is $(X-2)^3$ omdat 3 de maximale grootte van een Jordanblok is.

2a. De matrix $A = \begin{pmatrix}0&4\\-4&0\end{pmatrix}$ heeft eigenwaarden $4i$ en $-4i$ met eigenvectoren $\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$ resp. $\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$. De eigenvectoren zijn orthogonaal, nl. $\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix} = 1\cdot 1 + i\cdot i = 0$. Beide eigenvectoren hebben norm $\sqrt{1^2+|i|^2} = \sqrt{2}$. Dan is de matrix van genormaliseerde eigenvectoren $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\i&-i\end{pmatrix}$ unitair en $A = UDU^{-1}$ met $D = \begin{pmatrix}4i&0\\0&-4i\end{pmatrix}$. (Het is ook correct om aan te tonen dat $U^*U = I$ of $UU^* = I$.)

b. Nu is

$$e^{tA} = Ue^{tD}U^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\i&-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{4it}&0\\0&e^{-4it}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-i\\1&i\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{4it}+e^{-4it} & -ie^{4it}+ie^{-4it}\\ ie^{4it}-ie^{-4it} & e^{4it}+e^{-4it}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos 4t & \sin 4t\\ -\sin 4t & \cos 4t\end{pmatrix}.$$

Een andere methode om e^{tA} te berekenen: merk op dat $A = 4J$ en $J^2 = -I$. Dan is

$$e^{tA} = I + tA + \frac{1}{2}t^2A^2 + \frac{1}{3!}t^3A^3 + \ldots = I + 4tJ - \frac{1}{2}(4t)^2 I - \frac{1}{3!}(4t)^3 J + \ldots = \cos 4t I + \sin 4t J.$$

3a. Voor $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{C}^3$ is $(T(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{a})(\mathbf{b}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{b})(\mathbf{a}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, (\mathbf{y}, \mathbf{b})\mathbf{a} + (\mathbf{y}, \mathbf{a})\mathbf{b}) = (\mathbf{x}, T(\mathbf{y}))$ dus $T^* = T$.
Anders: de standaardmatrix van T is $\mathbf{ba}^* + \mathbf{ab}^*$ en deze matrix is hermites: $(\mathbf{ba}^* + \mathbf{ab}^*)^* = \mathbf{ab}^* + \mathbf{ba}^*$; dan is T zelf hermites (volgens een op college bewezen resultaat).

b. Een handige basis is $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ met $\mathbf{c}$ een eenheidsvector orthogonaal met $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ (in feite is $\mathbf{c} = \pm\, \bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{b}}$). Deze is orthonormaal omdat $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ een orthonormaal stelsel is. Door de beelden van deze basisvectoren te berekenen, vinden we de basis t.o.v. deze basis: $T(\mathbf{a}) = \mathbf{b}, T(\mathbf{b}) = \mathbf{a}, T(\mathbf{c}) = \mathbf{0}$. De matrix is dus $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Ook goed (maar onhandig met het oog op onderdeel c) is de matrix t.o.v. de standaardbasis: deze heeft als element in de i-e rij en j-e kolom $a_i\overline{b_j} + b_i\overline{a_j}$ (let op complexe conjugatie).

c. Het karakteristieke polynoom van de matrix in b is $X(X^2 - 1)$ dus de eigenwaarden zijn $0, 1, -1$. Een orthonormale basis van eigenvectoren is $\{\mathbf{c}, \dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{\sqrt{2}}, \dfrac{\mathbf{a}-\mathbf{b}}{\sqrt{2}}\}$.

4A. Antilineariteit: $i_{\mathbf{v}+\mathbf{v}'} = i_{\mathbf{v}} + i'_{\mathbf{v}}$ en $i_{\lambda\mathbf{v}} = \overline{\lambda} i_{\mathbf{v}}$: immers is voor $\mathbf{x} \in V$

$$i_{\mathbf{v}+\mathbf{v}'}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{v} + \mathbf{v}') = (\mathbf{x}, \mathbf{v}) + (\mathbf{x}, \mathbf{v}') = i_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) + i_{\mathbf{v}'}(\mathbf{x}),$$

$$i_{\lambda\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \lambda\mathbf{v}) = \overline{\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \overline{\lambda} i_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}).$$

i is injectief: $i_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{v}) = 0$ voor alle $\mathbf{x} \in V$ impliceert $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ en dus $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
i surjectief: $i(V)$ is isomorf met $V/\ker(i)$ en dus met V. Daar $\dim i(V) = \dim(V) = \dim(V')$ is $i(V) = V'$. Het is ook mogelijk om aan te tonen dat als $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ een basis is van V, dan is $\{i_{\mathbf{v}_1}, \ldots, i_{\mathbf{v}_n}\}$ een basis van V' - immers het laatste stelsel is lin.onafhankelijk: uit $0 = \sum_{j=1}^n \lambda_j i(\mathbf{v}_j) = i(\sum_{j=1}^n \overline{\lambda_j}\mathbf{v}_j)$ volgt m.b.v. injectiviteit dat $\sum_{j=1}^n \overline{\lambda_j}\mathbf{v}_j = \mathbf{0}$ en dus zijn alle $\lambda_j = 0$. Daar $\dim(V') = n$, hebben we inderdaad een basis en daar alle basisvectoren in $i(V)$ liggen, is $i(V) = V'$.

b. Laat $\mathbf{x} \in V, \|\mathbf{x}\| = 1$. Dan is $|i_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})| \leq \|\mathbf{v}\|$ volgens de ongelijkheid van Schwarz. Anderzijds geldt gelijkheid voor $\mathbf{x} = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$: $i_{\mathbf{v}}(\dfrac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}) = \dfrac{(\mathbf{v}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|} = \|\mathbf{v}\|$ en dus is $\|i_{\mathbf{v}}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} |i_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})| = \|\mathbf{v}\|$.

c. Voor $\mathbf{x} \in V$ is $T'(i_\mathbf{v})(\mathbf{x}) = i_\mathbf{v}(T(\mathbf{x})) = (\mathbf{v}, T(\mathbf{x})) = (T^*(\mathbf{v}), \mathbf{x}) = i_{T^*\mathbf{v}}(\mathbf{x})$.
Uit $(T'(i_\mathbf{v}), i_\mathbf{w}) = (i_{T^*\mathbf{v}}, i_\mathbf{w}) = (\mathbf{w}, T^*(\mathbf{v})) = (T(\mathbf{w}), \mathbf{v}) = (i_\mathbf{v}, i_{T\mathbf{w}})$ volgt dat $(T')^*(i_\mathbf{w}) = i_{T\mathbf{w}}$. Nu is $(T')^*T'(i_\mathbf{v}) = (T')^*(i_{T^*\mathbf{v}}) = i_{TT^*\mathbf{v}}$ en $T'(T')^*(i_\mathbf{v}) = T'(i_{T\mathbf{v}}) = i_{T^*T\mathbf{v}}$. Hieruit volgt de bewering onmiddellijk (daar $i(V) = V$).

4Ba. H wordt opgespannen door $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Laat A de matrix $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ zijn. Dan is $A^TA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ en de determinant is 4. Laat $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en B de matrix $(\mathbf{b}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ zijn. Dan is $\det(B^TB) = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8$. De gevraagde afstand is nu $d(\mathbf{b}, H) = \sqrt{\dfrac{\det(B^TB)}{\det(A^TA)}} = \sqrt{2}$.

b. (1). Zij $U\mathbf{x} = a\mathbf{x}$ voor $a \in \mathbf{C}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Dan $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (U\mathbf{x}, U\mathbf{x}) = (a\mathbf{x}, a\mathbf{x}) = |a|^2(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ en dus is $|a| = 1$.
(2.) De determinant is het product van de e.w. van U. Daar elke e.w. modulus 1 heeft geldt dit ook voor het product.
Anders: $1 = \det I = \det(U^*U) = \det(U)\det(U^*) = \det(U)\overline{\det(U)} = |\det(U)|^2$.

5. Merk op dat de eenheidsmatrix I_n normaal is en $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ een orthonormale basis is van eigenvectoren. Uit de spectraaldecompositie volgt dan: $I_n = \mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^* + \ldots + \mathbf{v}_n\mathbf{v}_n^*$ dus

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^* I_n \mathbf{x} = \mathbf{x}^*\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^*\mathbf{x} + \ldots + \mathbf{x}\mathbf{v}_n\mathbf{v}_n^*\mathbf{x} = |(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1)|^2 + \ldots + |(\mathbf{x}, \mathbf{v}_n)|^2$$

(aangezien $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{w}^*\mathbf{v}$).
Anders: omdat $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ een orthonormale basis is, is $\mathbf{x} = (\mathbf{x}, \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1 + \ldots + (\mathbf{x}, \mathbf{v}_n)\mathbf{v}_n$. Dus is

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} ((\mathbf{x}, \mathbf{v}_i)\mathbf{v}_i, (\mathbf{x}, \mathbf{v}_j)\mathbf{v}_j) = \sum_{i,j=1}^{n} (\mathbf{x}, \mathbf{v}_i)(\mathbf{v}_j, \mathbf{x})(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^{n} |(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1)|^2.$$

TENTAMEN LINEAIRE ALGEBRA 2
29 maart 2005, 10.00 - 13.00 uur.

---

1. Beschouw de matrix $A = a\begin{pmatrix} 12 & b & c \\ -3 & -4 & d \\ 4 & -12 & 3 \end{pmatrix}$ voor reële getallen a, b, c en d waarbij $a > 0$. Gegeven is dat A een orthogonale matrix is.

a. Bepaal de getallen a, b, c en d. (4 pt)

b. Ga na of A de standaardmatrix is van een rotatie dan wel een draaispiegeling. (3 pt)

c. Bepaal de draaiingsas en de cosinus van de draaiingshoek. (6 pt)

2. Gegeven is de matrix $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -1 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Gegeven is verder dat het karakteristieke polynoom $\chi_B(X)$ van B gelijk is aan $X^4 + 2X^3 - 2X - 1$.

a. Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van B en geef van elke eigenwaarde de algebraïsche en meetkundige multipliciteit aan. (10 pt)

b. Bepaal een Jordan-normaalvorm van B en geef het minimumpolynoom van B. (8 pt)

c. Geef een basis van gegeneraliseerde eigenvectoren aan. (5 pt)

3. Beschouw de 2×2-matrix $C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$.

a. Leg uit hoe je zonder te rekenen aan de vorm van C kunt zien dat C een orthonormale basis van eigenvectoren heeft. (2 pt)

b. Bepaal een orthonormale basis van eigenvectoren van C (laat ook zien dat de gevonden basis inderdaad orthonormaal is). (6 pt)

c. Bewijs dat $e^C = e\begin{pmatrix} \cosh 1 & i \sinh 1 \\ -i \sinh 1 & \cosh 1 \end{pmatrix}$. (6 pt)

Opgave 4 staat op de achterzijde van dit blad.

4. V is de vectorruimte van reële 3×3-matrices. De volgende deelverzamelingen van V zijn lineaire deelruimten:

i. U_1 is de lineaire deelruimte van symmetrische 3×3-matrices met spoor nul.
ii. U_2 is de lineaire deelruimte van antisymmetrische 3×3-matrices.
iii. U_3 is de lineaire deelruimte opgespannen door de eenheidsmatrix I_3.

a. Geef de dimensies van de lineaire deelruimten U_1, U_2 en U_3 aan. (5 pt)

b. Leg uit waarom $V = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$. (5 pt)

Op V wordt een inwendig product gegeven door $(X, Y) = \mathrm{tr}(X^T Y)$ (er hoeft niet te worden aangetoond dat dit inderdaad een inwendig product voorstelt).

c. Toon aan dat de lineaire deelruimten U_1, U_2 en U_3 onderling orthogonaal zijn, m.a.w. als $X \in U_i$ en $Y \in U_j$ en $i \neq j$ dan is $(X, Y) = 0$. (5 pt)

d. Bewijs dat de orthogonale projectie $\pi_1 : V \to V$ op U_1 wordt gegeven door $\pi_1(X) = \frac{1}{2}(X + X^T) - \lambda \cdot \mathrm{tr}(X) I_3$ voor zekere $\lambda \in \mathbf{R}$ en bepaal de waarde van λ. (5 pt)

e. Bepaal de orthogonale projecties π_2, π_3 op U_2, resp U_3 en toon aan dat $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = id_V$. (5 pt)

ANTWOORDEN.

1a. $a = \frac{1}{13}$ (kolommen hebben norm 1), verder is $b = 3, c = -4, d = -12$.

b. De determinant is negatief, dus het is een draaispiegeling.

c. De draaiingsas is het span van de eigenvector $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ bij de e.w. -1. Verder is het spoor gelijk aan $-1 + 2\cos\phi$ waarbij ϕ de draaiingshoek is. Anderzijds is het spoor 11/13, dus $\cos\phi = 12/13$.

2. Het karakteristiek polynoom is $(X-1)(X+1)^3$ dus de eigenwaarden zijn $a_1 = 1$ met algebraïsche en dus ook meetkundige multipliciteit 1 en $a_2 = -1$ met algebraïsche multipliciteit 3. Een eigenvector bij a_1 is $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. De enige eigenvector bij a_2 is $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. De meetkundige multipliciteit van a_2 is dus 1.

b. Omdat de meetk.mult. van beide eigenwaarden 1 is, is er bij beide e.w. één Jordanblok (met grootte gelijk aan de alg.mult.). Een Jordan normaalvorm is dus $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Het minimumpolynoom is $(X+1)^3(X-1)$ (de macht bij elke factor $(X-a)$ is gelijk aan de grootte van het grootste Jordanblok bij de e.w. a).

b. Een basis van gegeneraliseerde eigenvectoren bestaat uit een vereniging van bases van de gegeneraliseerde eigenruimten E_a. E_1 is het span van $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. E_{-1} is de kern van $(B+I)^3 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dus $E_{-1} = \{x_1 - x_2 = 0\}$ (in een beetje slordige notatie!). Een basis van deze lineaire deelruimte is

$\{v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. samen met v_1 geeft dit een basis van gegeneraliseerde eigenvectoren.

3a. C is hermites (en i.h.b. normaal) en dus unitair diagonaliseerbaar.

b. De eigenwaarden zijn $a_1 = 0$ en $a_2 = 2$ en een orthonormale basis van eigenvectoren bestaat uit $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ en $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$. deze hebben norm 1 en zijn orthogonaal (denk aan hermiticiteit van het inproduct).

c. Gebruik bijvoorbeeld de spectraaldecompositie: $C = a_1 u_1 u_1^* + a_2 u_2 u_2^*$ en dus $e^C = e^{a_1} u_1 u_1^* + e^{a_2} u_2 u_2^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} + \frac{e^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$. Uitwerken geeft de gevraagde vorm.

4a. $\dim(U_1) = 5, \dim(U_2) = 3, \dim(U_1) = 1$.

b. Elke 3×3-matrix A kan op precies 1 manier geschreven worden als een som van een antisymmetrische en een symmetrische matrix $A = (A + A^T)/2 + (A - A^T)/2$. M.a.w. $U_2 \cap (U_1 + U_3) = \{0\}$ (immers als S zowel symmetrisch als antisymmetrisch is dan is $S = S^T = -S^T = O$). Elke symmetrische matrix kan vervolgens op precies een manier geschreven worden als een spoorloze symmetrische matrix plus een matrix van de vorm aI: immers $S = aI + (S - aI)$ en uit $\mathrm{tr}(S - aI) = O$ volgt dat $a = \mathrm{tr}(S)/3$. (Een iets andere methode bestaat eruit om aan te tonen dat de som van de dimensies van de U_i's gelijk is aan 9, terwijl $U_2 \cap (U_1 + U_3) = \{O\}$ en $U_1 \cap U_3 = \{O\}$).

c. Omdat $\mathrm{tr}(XY) = \mathrm{tr}(YX)$, geldt voor A antisymmetrisch en S symmetrisch, dat $(A, S) = \mathrm{tr}(A^T S) = -\mathrm{tr}(AS) = -\mathrm{tr}(SA) = -\mathrm{tr}(S^T A) = -(S, A) = -(A, S)$. Dus $(A, S) = 0$ en U_2 is orthogonaal met $U_1 \oplus U_3$. Tenslotte is ook U_1 orthogonaal met U_3, immers voor $S \in U_1$ is $(S, aI) = a \cdot \mathrm{tr}(S) = 0$.

d,e. De decompositie van X t.o.v. $U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$ is (zie b)

$$X = ((X + X^T)/2 - aI) + ((X - X^T)/2) + (aI).$$

Omdat de U_i's onderling orthogonaal zijn, is de projectie op een component een orthogonale projectie. Daar $U_3 = \mathrm{span}\{I\}$, is a direct te vinden uit $aI = \pi_3(X) = \frac{(X,I)}{(I,I)} I = \frac{\mathrm{tr}(X)}{3} I$, dus $a = \frac{1}{3}\mathrm{tr}(X)$ (of zie onderdeel b waar a ook berekend is). verder is $\pi_2(X) = (X - X^T)/2$ en $\pi_1(X) = (X + X^T)/2 - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(X) I$.