TENTAMEN LINEAIRE ALGEBRA 2
maandag 9 januari 2006, 10.00-13.00

Bij elke vraag dient een berekening of motivering worden opgeschreven.

1. Beschouw de vectorruimte $V = \mathbf{R}^3$ met de lineaire deelruimten $U = \text{span}\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\}$ en

$W = \{\mathbf{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : x_1 + x_3 = 0\}$.

a. Leg uit dat $V = U \oplus W$. (4 pt)

Zij $\pi_U : V \to V$ de projectie op U langs W.

b. Wat is de rang van π_U? (2 pt)

c. Bepaal de matrix van π_U t.o.v. de standaardbasis in $V = \mathbf{R}^3$. (6 pt)

2. B is de permutatiematrix $\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}$.

a. Toon aan dat het karakteristieke polynoom van B gelijk is aan $-(X^2-1)(X^3-1)$. (3 pt)

B heet diagonaliseerbaar *over* K ($K = \mathbf{R}$ of $\mathbf{C}$) als er een diagonaalmatrix D en een inverteerbare matrix U bestaan met elementen in K zo, dat $B = UDU^{-1}$.

b. Is B diagonaliseerbaar over $\mathbf{C}$? (6 pt)

c. Is B diagonaliseerbaar over $\mathbf{R}$? (3 pt)

3. Beschouw de kwadratische vorm $q(\mathbf{x}) = 2x_1^2 - 12x_1x_2 - 7x_2^2$ op $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$.

a. Bepaal een symmetrische matrix A zodanig dat $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$. (2 pt)

b. Bepaal een orthogonale matrix U en reële getallen d_1, d_2 zo, dat $q(\mathbf{x}) = d_1y_1^2 + d_2y_2^2$ en $U\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$. (6 pt)

c. Is de kwadratische vorm positief (semi-)definiet? (2 pt)

4a. Bepaal een matrix A met karakteristiek polynoom $-X^5 + X^4$ en minimumpolynoom $X^4 - X^3$. (5 pt)

b. Bestaat er een matrix B met hetzelfde karakteristieke polynoom en hetzelfde minimumpolynoom als de matrix A in (a) terwijl B niet gelijkvormig is met A? (4 pt)

5. $S : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ is een lineaire afbeelding met eigenwaarden 2 en -1 en bijbehorende eigenvectoren $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ resp. $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. (Op $\mathbf{C}^2$ is het standaard-hermites inproduct op de gebruikelijke wijze gedefinieerd.)

a. Leg uit dat uit de gegevens volgt dat S een normale afbeelding is. (4 pt)

b. Bepaal de matrix van S t.o.v. de standaardbasis in $\mathbf{C}^2$. (5 pt)

c. Bepaal de Euclidische norm $\|S\|$ van S. (2 pt)

d. Bereken de standaardmatrix van e^S. (4 pt)

(Als het niet gelukt is het antwoord van (b) te bepalen, dan mag i.p.v. (d) de matrix $e^{S'}$ met $S' = \begin{pmatrix} -2 & 6i \\ -6i & 7 \end{pmatrix}$ worden uitgerekend. Merk op dat S' niet de standaardmatrix van S is!)

6. V is een complexe vectorruimte met hermites inproduct $(\ , \ )$. De dimensie van V is gelijk aan 3. $\{a, b\}$ is een orthonormaal stelsel in V. Verder is de afbeelding $T : V \to V$ gegeven door $T(x) = i(a, x)b - i(b, x)a$.

a. Toon aan dat T een lineaire afbeelding is. (3 pt)

b. Bewijs dat T een hermitese (of zelfgeadjungeerde) afbeelding is. (5 pt)

c. Bewijs dat T^2 een orthogonale projectie is op span$\{a, b\}$. (4 pt)

d. Is T zelf ook een orthogonale projectie? (2 pt)

Antwoorden bij het tentamen van 9-1-06.

1a. Omdat $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$ (nagaan!) is de som $U + W$ gelijk aan de directe som $U \oplus W$. Verder is $\dim(U \oplus W) = \dim(U) + \dim(W) = 3$, dus is $U \oplus W = V$ (een lineaire deelruimte van een eindig-dimensionale vectorruimte V met dimensie gelijk aan $\dim(V)$, is gelijk aan V).

b. De rang van π_U is de dimensie van het bereik $\mathrm{im}(\pi_U)$, dus $\mathrm{rang}(\pi_U) = \dim(U) = 1$.

c. Noem de matrix P. Dan is

$$P\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad P\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad P\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

dus $P = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1/2&0&1/2\\0&0&0\\1/2&0&1/2\end{pmatrix}$.

2a. Doen.

b. $B = UDU^{-1}$ betekent $BU = UD$ dus $Bu_i = d_i u_i$ met u_i de i-e kolomvector van U en $d_i = D_{ii}$. Dus B diagonaliseerbaar over K dan en slechts dan als B een basis van eigenvectoren in K^n heeft (waarbij de eigenwaarden in K liggen).
Methode 1: B is unitair dus B heeft een (orthonormale) basis van eigenvectoren in $\mathbf{C}^n$; B is dus diagonaliseerbaar over $\mathbf{C}$.

Methode 2: Het karakteristieke polynoom van B heeft nulpunten $1, -1, -1/2 \pm (i/2)\sqrt{3}$. De e.w. $-1, -1/2 \pm (i/2)\sqrt{3}$ hebben alle algebraïsche en dus meetkundige multipliciteit 1, de e.w. 1 heeft alg.mult. 2 en B is diagonaliseerbaar precies dan indien de meetkundige multipliciteit ook 2 is, m.a.w. als de nulruimte/kern van $B - I = \begin{pmatrix}-1&0&0&0&1\\0&-1&0&1&0\\1&0&-1&0&0\\0&1&0&-1&0\\0&0&1&0&-1\end{pmatrix}$ dimensie 2 heeft (m.a.w. indien $\mathrm{rang}(B - I) = 3$). Dit is inderdaad het geval (de som van de 1e, 3e en 5e rij is de nulrij en de som van de 2e en 4e rij ook).

c. Omdat B ook niet-reële eigenwaarden heeft (nl. $1/2 \pm (i/2)\sqrt{3}$) kan B nooit een basis van eigenvectoren in $\mathbf{R}^5$ hebben. B is dus niet diagonaliseerbaar over $\mathbf{R}$.

3a. $A = \begin{pmatrix}2&-6\\-6&-7\end{pmatrix}$.

b. A heeft eigenwaarden 5 en -10 met eigenvectoren $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ resp. $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. Dus is $A = UDU^T$ met $D = \begin{pmatrix}5&0\\0&-10\end{pmatrix}$ en $U = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}$ een orthogonale matrix van eigenvectoren. $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}^T UDU^T\mathbf{x} = \mathbf{y}^T D\mathbf{y} = 5y_1^2 - 10y_2^2$ en $U^T\mathbf{x} = \mathbf{y}$ dus $\mathbf{y} = U\mathbf{x}$.

c. De symmetrische matrix A is positief (semi-)definiet als A louter positieve (resp. niet-negatieve) eigenwaarden heeft. A heeft echter zowel een positieve als een negatieve eigenwaarde, dus is indefiniet.

4a. A moet een 5×5-matrix zijn. De eigenwaarden zijn 0 met alg.multipliciteit 4 en 1 met alg. multipliciteit 1. Omdat in het minimumpolynoom $X^3(X-1)$ de factor X drie keer voorkomt, is de grootte van het grootste Jordanblok bij de e.w. 0 gelijk aan 3. Een matrix met deze eigenschappen is de Jordan-normaalvorm $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b. De JNV van de matrix heeft volgens (a) 1 Jordanblok bij e.w. 0 van grootte 3 en heeft dus nog een Jordanblok bij e.w. 0 van grootte 1; er is een Jordanblok bij e.w. 1 van grootte 1. De Jordan-normaalvorm is dus uniek (op permutatie van de blokken na). Daar twee matrices gelijkvormig zijn precies dan indien zij dezelfde JNV hebben, bestaat er niet zo'n matrix B.

5. De eigenvectoren zijn t.o.v. het standaard hermites inproduct orthogonaal: $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = -i \cdot 1 + 1 \cdot i = 0$. S heeft dus een orthogonale basis van eigenvectoren en is dus een normale afbeelding.

b. Gebruik de spectraaldecompositie: (we schrijven S voor de standaardmatrix): $S = 2u_1u_1^* - u_2u_2^*$ met $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ en $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ (of $S = UDU^*$ met $U = (u_1 \ u_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ en $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$). Uitwerken geeft $S = \frac{2}{2}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3i \\ -3i & 1 \end{pmatrix}$.

c. Omdat S normaal is, is $\|S\|$ gelijk aan het maximum van de moduli van de eigenwaarden, dus $\|S\| = 2$.

d. $e^S = e^2u_1u_1^* + e^{-1}u_2u_2^*$ of $e^S = Ue^DU^*$ met $e^D = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix}$. Uitwerken geeft

$$e^S = \frac{e^2}{2}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & 1 \end{pmatrix} + \frac{e^{-1}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^2 + e^{-1} & ie^2 - ie^{-1} \\ -ie^2 + ie^{-1} & e^2 + e^{-1} \end{pmatrix}.$$

d.' De matrix S' is hermites en heeft eigenwaarden 10 en -5 met eigenvectoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}$ resp. $\begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}$. De norm van S' is dus 10 en $S' = UDU^*$ met $U = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2i \\ -2i & 1 \end{pmatrix}$ en $D = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$. Dan is $e^{S'} = Ue^DU^* = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} e^{10} + 4e^{-5} & 2ie^{10} - 2ie^{-5} \\ -2ie^{10} + 2ie^{-5} & 4e^{10} + e^{-5} \end{pmatrix}$.

6a. We gebruiken dat het inproduct lineair is in de tweede component: $T(x+y) = i(a, x+y)b - i(b, x+y)a = i(a,x)b + i(a,y)b - i(b,x)a - i(b,y)a = T(x) + T(y)$ en $T(\lambda x) = i(a, \lambda x)b - i(b, \lambda x)a = i\lambda(a,x)b - i\lambda(b,x)a = \lambda T(x)$ voor $\lambda \in \mathbf{C}$ en $x, y \in V$.

b. Methode 1: $(T(x), y) = (i(a,x)b - i(b,x)a, y) = -i(x,a)(b,y) + i(x,b)(a,y)$ wegens antilineariteit van de eerste component en $(x,a) = \overline{(a,x)}$. $(x, T(y)) = (x, i(a,y)b - i(b,y)a) = i(a,y)(x,b) - i((b,y)(x,a)$ wegens lineariteit van de tweede component. We zien dat $(T(x), y) = (x, T(y))$ voor $x, y \in V$ en dus is T hermites.

Methode 2: Vul $\{a, b\}$ aan tot een orthonormale basis $\{a, b, c\}$ van V. Daar $T(a) = ib$, $T(b) = -ia$ en $T(c) = 0$ is de matrix van T t.o.v. deze basis $A_T = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ en daar $A_T^* = A_T$ is ook $T = T^*$ (deze conclusie gaat alleen op als A_T de matrix is t.o.v. een **orthonormale** basis!).

c. Uit $T(a) = ib$, $T(b) = -ia$ volgt dat $T^2(a) = a$ en $T^2(b) = b$ en verder is $T^2(x) = T(x) = 0$ als $(x,a) = (x,b) = 0$. Dus is $T^4 = (T^2)^2 = T^2$ en T^2 is net als T hermites. T^2 is dus een orthogonale projectie op im(T)=span$\{a, b\}$.

d. Daar $T^2 \neq T$ is T geen (orthogonale) projectie.

TENTAMEN LINEAIRE ALGEBRA 2
dinsdag 28 maart 2006, 10.00-13.00

Bij elke vraag dient een berekening of motivering worden opgeschreven.

1. In $V = \mathbf{R}^4$ zijn gegeven de vectoren $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. V is voorzien van het standaard-inproduct. Verder zijn gegeven de lineaire deelruimten $U = \text{span}\{\mathbf{u}\}$, $W = \text{span}\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ en $Z = \text{span}\{\mathbf{z}\}$.

a. Leg uit dat $V = U \oplus W \oplus Z$. (6 pt)

$\pi_U : V \to V$ is de projectie op de component U in de directe som.

b. Is π_U de orthogonale projectie op U? (Motiveer je antwoord). (3 pt)

c. Bepaal de matrix van π_U t.o.v. de standaardbasis in $\mathbf{R}^4$. (7 pt)

2. Beschouw de matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Bepaal een Jordan-normaalvorm van A en bepaal het minimumpolynoom van A. (10 pt)

b. Ga na of A en B gelijkvormige matrices zijn. (6 pt)

3. V is de verzameling van complexe 3×3-matrices. T.o.v. de matrixoptelling en scalaire vermenigvuldiging krijgt V de structuur van een complexe vectorruimte. U is de deelverzameling van symmetrische 3×3-matrices (dus $X = X^T$ voor $X \in U$) en W is de deelverzameling van de antisymmetrische matrices.

a. Ga na dat U en W lineaire deelruimten van V zijn en bepaal de dimensies. (6 pt)

b. Bewijs dat $(X, Y) = \text{tr}(X^*Y)$ een (hermites) inproduct op V is. Hierbij is tr het spoor en X^* de hermites geadjungeerde van X. (7 pt)

c. Bewijs dat $U = W^\perp$ t.a.v. het in (b) gegeven inproduct. (7 pt)

d. $T : V \to V$ is de lineaire afbeelding die een matrix X afbeeldt op $T(X) = X - X^T$. Beredeneer waarom T een normale afbeelding is en bepaal de norm $\|T\|$ (hierbij is $\|\ \|$ de (Euclidische) afbeeldingsnorm die wordt geïnduceerd door het inproduct). (8 pt)

De rest van de opgaven staat op de ommezijde van deze pagina.

4. Beschouw de kwadratische vorm $q(\mathbf{x}) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2$ op $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

a. Bepaal een symmetrische matrix A zodanig dat $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$. (2 pt)

b. Bepaal een orthogonale matrix U en reële getallen d_1, d_2 zo, dat de kwadratische vorm in diagonaalvorm staat, m.a.w. $q(\mathbf{x}) = d_1y_1^2 + d_2y_2^2$ en $U \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. (8 pt)

c. Welke waarden neemt $q(\mathbf{x})$ aan op de eenheidscirkel $x_1^2 + x_2^2 = 1$? (4 pt)

5. V is een driedimensionale complexe vectorruimte met inwendig product $(\ ,\ )$. $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ is een orthonormale basis in V. De afbeelding $T : V \to V$ is gegeven door
$T(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}, \mathbf{x})\mathbf{b} + (\mathbf{b}, \mathbf{x})\mathbf{c} + (\mathbf{c}, \mathbf{x})\mathbf{a}$.

a. Bepaal de hermites geadjungeerde T^* van T. (5 pt)

b. Bewijs dat T unitair is. (5 pt)

c. Bepaal de eigenwaarden van T. (6 pt)

6. A is een inverteerbare complexe $n \times n$-matrix.

a. Laat zien dat A^*A positief definiet is. (3 pt)

b. Bewijs dat A^*A louter positieve reële eigenwaarden heeft (zonder het feit te gebruiken dat een positief-definiete matrix louter positieve eigenwaarden heeft). (4 pt)

Antwoorden bij het tentamen van 28-3-06.

1. Ga na dat de vier vectoren lineair onafhankelijk zijn. Dus is de som $U+W+Z$ een directe som (nl. anders zou er een niet-triviale lineaire combinatie van de vectoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}$ zijn die nul oplevert). De som van de dimensies is verder 4, dus de directe som is een lineaire deelruimte met dimensie 4 en is dus gelijk aan V.

b. π_U is niet de orthogonale projectie omdat $U^\perp \neq W \oplus Z$ (immers $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$).

c. Vanwege (b) kunnen we niet de formule voor orthogonale projectie gebruiken. We bepalen de beelden van de standaardbasisvectoren rechtstreeks (of gebruik basistransformatiematrices, maar dat is hier omslachtiger). Noem de matrix P. Dan is $P(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ en $P(\mathbf{v}) = P(\mathbf{w}) = \mathbf{P}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$. Door handige lineaire combinaties te nemen (zoals $\mathbf{u}+\mathbf{z}, \mathbf{u}-\mathbf{z}$) vinden en te bedenken dat de i-e kolom van P gelijk is aan $P\mathbf{e}_i$ vinden we $P = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & -1/2 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/4 & 1/2 & -3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Beide matrices hebben karakteristiek polynoom $(X-2)^4$. $A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ en $B - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ hebben beide rang 2, dus de e.w. 2 heeft meetkundige multipliciteit 2 en algebraïsche mult. 4. Er zijn in beide gevallen 2 Jordanblokken bij e.w. 2. Verder heeft $(A-2I)^2$ rang 1, dus er is één Jordanblok bij A van afmeting minstens 2. De JNV van A is dus $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ en het minimumpolynoom is $(X-2)^3$ omdat het grootste Jordanblok bij e.w. 2 afmeting 3 heeft. Daarentegen is $(B-2I)^2 = O$ dus B heeft twee Jordanblokken van afmeting 2 (en dus JNV $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$). A en B zijn dus niet gelijkvormig.

3a. Ga na dat als X, Y symmetrisch, resp antisymmetrisch zijn dan zijn $X+Y$ en aX (voor $a \in \mathbf{C}$) symmetrisch resp. antisymmetrisch. Verder is $\dim(U) = 6$ en $\dim(W) = 3$ net als voor reële matrices. Immers als (u_{ij}) symmetrisch is, dan is $u_{ij} = u_{ji}$ en er zijn 6 onafhankelijke keuzen voor u_{ij}. Als (w_{ij}) antisymmetrisch is, dan is $w_{ii} = 0$ en $w_{ij} = -w_{ji}$ dus er zijn maar 3 onafhankelijke keuzen w_{12}, w_{13}, w_{23}.

b. Er geldt dat $\mathrm{tr}(X^*Y) = \sum_{i,j=1}^{3} \overline{x_{ij}} y_{ij}$. Dit is het standaard(-hermites) inproduct op $\mathbf{C}^9$ (met een geschikte hernummering van de indices).

c. Als X symmetrisch en Y antisymmetrisch, dan is $x_{ij} = x_{ji}$ en $y_{ij} = -y_{ji}$ dus

$$\sum_{i,j=1}^{3} \overline{x_{ij}} y_{ij} = \sum_{i,j=1}^{3} \overline{x_{ji}} y_{ji} = -\sum_{i,j=1}^{3} \overline{x_{ij}} y_{ij},$$

m.a.w. als $X \in U$ en $Y \in W$ dan is $(X, Y) = -(X, Y)$ dus $(X, Y) = 0$. Dus geldt $W \subset U^{\perp}$. Omdat anderzijds $\dim(U^{\perp}) = 9 - \dim(U) = 3 = \dim(W)$ geldt $W = U^{\perp}$.

d. Als $X \in U$ dan is $T(X) = 0$ en als $X \in W$ dan is $T(X) = 2X$. Omdat $V = U \oplus W$, is U de eigenruimte van T bij eigenwaarde 0 en W de eigenruimte bij e.w. 2 en T heeft geen andere eigenwaarden. Uit (c) volgt dat T een orthogonale basis van eigenvectoren heeft (nl. neem de vereniging een orthogonale basis in U en een orthogonale basis in W), is T normaal. De Euclidische norm van een normale afbeelding is het maximum van de moduli van de eigenwaarden, dus $\|T\| = 2$.

4a. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

b. Daar $A = UDU^T$ met D een diagonaalmatrix (met de eigenwaarden d_1, d_2 van A op de hoofddiagonaal) en U een orthogonale matrix van eigenvectoren, is $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}^T UDU^T\mathbf{x} = \mathbf{y}^T D\mathbf{y} = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2$ met $U^T\mathbf{x} = \mathbf{y}$ dus $U\mathbf{y} = \mathbf{x}$. De eigenwaarden van A zijn $d_1 = 2, d_2 = 4$ met eigenvectoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ resp. $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Omdat U een orthogonale matrix van eigenvectoren is is $U = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

c. Merk op dat omdat U orthogonaal is, $\|\mathbf{y}\| = \|U\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\|$. Dus als $x_1^2 + x_2^2 = 1$, dan is ook $y_1^2 + y_2^2 = 1$. Dan neemt $q(\mathbf{x}) = 2y_1^2 + 4y_2^2$ alle waarden in het interval $[2, 4]$ aan.

5a. M.b.v. $(\mathbf{y}, T(\mathbf{x})) = (T^*(\mathbf{y}), \mathbf{x})$ vinden we $T^*(\mathbf{y}) = (\mathbf{b}, \mathbf{y})\mathbf{a} + (\mathbf{c}, \mathbf{y})\mathbf{b} + (\mathbf{a}, \mathbf{y})\mathbf{c}$.

b. $T^*T(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}, \mathbf{x})\mathbf{a} + (\mathbf{b}, \mathbf{x})\mathbf{b} + (\mathbf{c}, \mathbf{x})\mathbf{c}$. Omdat $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ een orthonormale basis is, is het rechterlid gelijk aan $\mathbf{x}$ (spectrale decompositie van de identiteit). Dus is $T^*T = id_V$ ofwel $T^* = T^{-1}$ en T is dus unitair.

Anders: De matrix van T t.o.v. de basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ is $T_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dit is een unitaire matrix (nagaan dat $(T_{\mathcal{B}})^{-1} T_{\mathcal{B}} = I$). Omdat de basis $\mathcal{B}$ orthonormaal is, is de afbeelding T ook unitair (merk op dat dit alleen opgaat als de basis orthonormaal is!).

c. We gebruiken de matrix $T_{\mathcal{B}}$: het karakteristieke polynoom is $-X^3 + 1$. De eigenwaarden zijn dus $1, e^{2\pi i/3} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}\sqrt{3}$ en $e^{-2\pi i/3} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{i}{2}\sqrt{3}$.