TENTAMEN LINEAIRE ALGEBRA 2
donderdag 11 januari 2007, 10.00-13.00

Bij elke vraag dient een berekening of motivering te worden opgeschreven.
Grafische rekenmachines zijn op het tentamen niet toegestaan, wel mag een gewone, niet-programmeerbare, wetenschappelijke rekenmachine worden gebruikt.

---

1. Laat $\ell \subset \mathbf{R}^3$ de lijn zijn die wordt opgespannen door $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a. Bepaal een orthonormale basis van $\ell^\perp$. (4 pt)

Zij $A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ de rotatie in $\mathbf{R}^3$ met ℓ als rotatieas en π als rotatiehoek.

b. Geef een geschikte orthonormale basis van $\mathbf{R}^3$ en de bepaal de matrix van A t.o.v. die basis. (6 pt)

c. Bepaal de matrix van A t.o.v. de standaardbasis. (6 pt)

2. Beschouw in $\mathbf{R}^2$ de bilineaire vorm $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + 3x_2y_2$. Hierbij is $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

a. Toon aan dat $B(\ ,\ )$ een inwendig product op $\mathbf{R}^2$ is. (7 pt)

b. Bepaal een basis van $\mathbf{R}^2$ die orthonormaal is t.o.v. het inwendig product $B(\ ,\ )$. (10 pt)

3. Gegeven is de matrix $C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 10 & -6 \\ 4 & 0 & 15 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Bepaal de eigenwaarden van C en geef voor iedere eigenwaarde een basis van de bijbehorende eigenruimte. Geef tevens de algebraïsche en meetkundige multipliciteit van iedere eigenwaarde. (8 pt)

b. Bepaal een Jordan-normaalvorm van C en geef tevens het minimumpolynoom van C. (10 pt)

Zie de ommezijde van deze pagina voor de overige opgaven.

4. Zij $V = \mathcal{M}(n \times n, \mathbf{C})$ de vectorruimte van complexe $n \times n$-matrices voorzien van het inwendig product $(A, B) = \mathrm{tr}(A^* B)$. Laat U een vaste unitaire $n \times n$-matrix zijn en definieer de lineaire afbeelding $\psi : V \to V$ door $\psi(A) = UA$.

a. Laat zien dat ψ een unitaire afbeelding is. (4 pt)

Laat $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ een orthonormale basis van eigenvectoren van U zijn in $\mathbf{C}^n$. Definieer de matrices A_{ij} voor $i, j = 1, 2, \ldots, n$ d.m.v.

$$A_{ij} = (\mathbf{0} \ldots \mathbf{0}\ \mathbf{a}_j\ \mathbf{0} \ldots \mathbf{0})$$

waarbij $\mathbf{a}_j$ in de i-e kolom staat (en de andere kolomvectoren de nulvector zijn).

b. Toon aan dat A_{ij} een eigenvector is van ψ. (4 pt)

c. Toon aan dat de matrices A_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ een orthonormale basis van eigenvectoren van ψ vormen. (6 pt)

d. Laat χ_U en χ_ψ de karakteristieke polynomen zijn van U resp. ψ. Leg uit waarom $\chi_\psi(x) = \chi_U(x)^n$. (4 pt)

5. Laten $x_1, \ldots, x_n$ verschillende reële getallen zijn. Zij $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ en laat W de vectorruimte zijn van alle reële functies $f : S \to \mathbf{R}$, met puntsgewijze optelling en scalaire vermenigvuldiging.

a. Laat zien dat W n-dimensionaal is. (5 pt)

Zij P_{n-1} de vectorruimte van alle polynomen $p(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j$ van graad hoogstens $n-1$ met reële coëfficiënten a_j en met puntsgewijze optelling en scalaire vermenigvuldiging. Definieer de (restrictie)afbeelding Res: $P_{n-1} \to W$ door

$$(\mathrm{Res}\ p)(x_k) = p(x_k) \qquad \text{voor } k = 1, \ldots, n.$$

b. Laat zien dat Res een lineaire afbeelding is. (4 pt)

c. Toon aan dat Ker Res $= \{0\}$. (4 pt)

d. Bewijs dat er voor iedere keuze van reële getallen $c_1, \ldots, c_n$ precies één polynoom p van graad hoogstens $n-1$ is, zodanig dat $p(x_k) = c_k$ voor $k = 1, \ldots, n$. (5 pt)