TENTAMEN LINEAIRE ALGEBRA 2
dinsdag 3 april 2007, 10.00-13.00

Dit tentamen bestaat uit vijf opgaven. Bij elke vraag dient een berekening of motivering te worden opgeschreven.
Grafische en programmeerbare rekenmachines zijn op het tentamen niet toegestaan, wel mag een gewone (niet-programmeerbare) wetenschappelijke rekenmachine worden gebruikt.

---

1. Zij $V \subset \mathbf{R}^3$ het vlak met vergelijking $x_1 + 2x_2 = 0$. $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ is de loodrechte spiegeling in V.

a. Bepaal een orthonormale basis van V. (4 pt)

b. Geef een geschikte orthonormale basis van $\mathbf{R}^3$ en bepaal de matrix van S t.o.v. die basis. (6 pt)

c. Bepaal de matrix van S t.o.v. de standaardbasis. (6 pt)

2. Beschouw in $\mathbf{C}^2$ de vorm $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{x_1}y_1 + i\,\overline{x_2}y_1 - i\,\overline{x_1}y_2 + 3\overline{x_2}y_2$. Hierbij is $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

a. Toon aan dat $B(\ ,\ )$ een (hermites) inwendig product op $\mathbf{C}^2$ is. (7 pt)

b. Bepaal een basis van $\mathbf{C}^2$ die orthonormaal is t.o.v. het inwendig product $B(\ ,\ )$. (10 pt)

3. Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Bepaal een Jordan-normaalvorm van A. (10 pt)

b. Bepaal het minimumpolynoom van A. (3 pt)

c. Druk A^{-1} uit als een polynoom in A. (3 pt)

De laatste twee opgaven staan op de volgende pagina.

4. Zij P_n de vectorruimte van polynomen $p(X) = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ van graad hoogstens n met complexe coëfficiënten $a_0, \ldots, a_n$ en met de gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging. Met $p'(X)$ geven we de afgeleide naar X van $p(X)$ aan. Laat $U = \{p \in P_n : p(1) = p'(1) = 0\}$ en $W = \text{span}\{1, X\}$.

a. Toon aan dat U een lineaire deelruimte is van P_n. (4 pt)

b. Toon aan dat $\{(X-1)^2, (X-1)^3, \ldots, (X-1)^n\}$ een basis is van U. (4 pt)

c. Bewijs dat $P_n = U \oplus W$. (4 pt)

$\pi : P_n \to P_n$ is de lineaire afbeelding gegeven door $\pi(p)(X) = p(1) + p'(1)(X-1)$.

d. Bepaal de matrix van π t.o.v. de basis $\{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$. (6 pt)

e. Leg uit dat π de projectie op W langs U is (m.a.w. π is de projectie op de tweede component van de directe som in (c)). (6 pt)

5. Zij $V = \mathcal{M}(n \times n, \mathbf{C})$ de vectorruimte van complexe $n \times n$-matrices met inwendig product $(A, B) = \text{tr}(A^*B)$ (voor n geheel, $n > 1$). Voor $D \in V$ is de lineaire afbeelding $R_D : V \to V$ gedefinieerd als $R_D(A) = AD$. Verder is de afbeelding $R : V \to \mathcal{L}(V)$ gedefinieerd door $R(D) = R_D$ (hierbij is $\mathcal{L}(V)$ de vectorruimte van lineaire afbeeldingen van V naar zichzelf).

a. Laat zien dat R een lineaire afbeelding is. (4 pt)

b. Toon aan dat $\ker(R) = \{0\}$. (3 pt)

c. Ga na of R inverteerbaar is. (3 pt)

d. Voor $D \in V$ is $(R_D)^*$ de geadjungeerde afbeelding van R_D. Bewijs dat $(R_D)^* = R_{D^*}$. (4 pt)

e. Zij $D \in V$. Bewijs dat D en R_D dezelfde eigenwaarden hebben. (4 pt)