# TENTAMEN LINEAIRE ALGEBRA 2

**dinsdag 8 januari 2008, 10:00-13:00**

Een gewone (niet-programmeerbare) rekenmachine is ter ondersteuning van de berekeningen toegestaan. Let wel: eindantwoorden alleen tellen niet, een volledige uitwerking is noodzakelijk.

Succes!

**1.** Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a). Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van $A$ en geef van elk van de eigenwaarden de algebraïsche en meetkundige multipliciteit.

(b). Bepaal een Jordan-normaalvorm van A.

(c). Bepaal het minimumpolynoom van $A$.

**2.** Zij $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ een orthonormale basis van $\mathbb{C}^n$ en laat $( \, , \, )$ het standaard-hermites inproduct op $\mathbb{C}^n$ zijn.

(a). Laat zien dat voor een vector $x \in \mathbb{C}^n$ geldt dat

$$x = (v_1, x)v_1 + (v_2, x)v_2 + \cdots + (v_n, x)v_n.$$

(b). Bewijs dat voor een vector $x \in \mathbb{C}^n$ geldt dat

$$(x, x) = |(v_1, x)|^2 + |(v_2, x)|^2 + \cdots + |(v_n, x)|^2.$$

**3.** Beschouw de kwadratische vorm $q$ op $\mathbb{R}^3$ gegeven door

$$q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 3x_2x_3.$$

(a). Bepaal een symmetrische matrix $A$ zodanig dat $q(x) = x^T Ax$.

(b). Bepaal een orthogonale matrix $U$ en reële getallen $d_1, d_2$ en $d_3$ zo, dat

$$q(x) = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + d_3y_3^2 \quad \text{met} \quad U \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(c). Is de kwadratische vorm positief (semi-)definiet?

Z.O.Z.

**4.** Zij $V \subset \mathbb{R}^4$ het hypervlak met vergelijking $x_1 + x_2 + x_4 = 0$ en laat $P : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ de orthogonale projectie op $V$ zijn.

(a). Bepaal een orthonormale basis van $V$.

(b). Geef een geschikte orthonormale basis van $\mathbb{R}^4$ en bepaal de matrix van $P$ ten opzichte van deze basis.

(c). Bepaal de matrix ten opzichte van de standaardbasis.

**5.** Laat $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ een lineaire afbeelding zijn met matrixrepresentatie $A$ ten opzichte van de standaardbasis van $\mathbb{C}^3$. Bepaal als $A$ gegeven wordt door

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

de Euclidische norm $\|T\|$ van $T$. Verklaar uw antwoord.

EINDE

**Normering:**

**1.** : 10+8+2 pt

**2.** : 10+10 pt

**3.** : 2+12+3 pt

**4.** : 6+6+6 pt

**5.** : 15 pt