HERTENTAMEN LINEAIRE ALGEBRA 2

dinsdag 25 maart 2008, 10:00-13:00

Een gewone (niet-programmeerbare) rekenmachine is ter ondersteuning van de berekeningen toegestaan. Let wel: eindantwoorden alleen tellen niet, een volledige uitwerking is noodzakelijk.

Succes!

1. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a). Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van A en geef van elk van de eigenwaarden de algebraïsche en meetkundige multipliciteit.

(b). Bepaal een Jordan-normaalvorm van A.

(c). Bepaal het minimumpolynoom van A.

2. Laat L de lijn zijn die wordt opgespannen door $(1, 1, -1)^T$ en laat $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de rotatie met L als rotatieas en $\pi/2$ als rotatiehoek zijn.

(a). Bepaal een orthonormale basis voor $L^\perp$.

(b). Geef een geschikte orthonormale basis van $\mathbb{R}^3$ en bepaal de matrix van A ten opzichte van deze basis.

(c). Bepaal de matrix van A ten opzichte van de standaardbasis.

3. Beschouw de kwadratische vorm q op $\mathbb{R}^3$ gegeven door

$$q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 3x_2x_3.$$

(a). Bepaal een symmetrische matrix A zodanig dat $q(x) = x^T Ax$.

(b). Bepaal een orthogonale matrix U en reële getallen d_1, d_2 en d_3 zo, dat

$$q(x) = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + d_3y_3^2 \quad \text{met} \quad U \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(c). Is de kwadratische vorm positief (semi-)definiet?

Z.O.Z.

4. Laat V de vectorruimte van reële $n \times n$-matrices zijn en beschouw de afbeeldingen $S : V \to V$ en $A : V \to V$ gegeven door $S(X) = \frac{1}{2}(X + X^T)$ en $A(X) = \frac{1}{2}(X - X^T)$.

(a). Laat zien dat S en A lineaire afbeeldingen zijn.

(b). Bepaal de deelruimten $\ker(S)$ en $\ker(A)$ en geef de dimensies van deze deelruimten. Laat zien dat

$$V = \ker(S) \oplus \ker(A).$$

(c). Ga na dat A en S projecties zijn en bepaal $\mathrm{im}(A)$ en $\mathrm{im}(S)$.

5. Bepaal een symmetrische 3×3 matrix A zodanig dat de eigenwaarden van A gelijk zijn aan $1, 1, -1$ en

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bepaal ook een expliciete uitdrukking voor de machten van A. Verklaar uw antwoorden.

EINDE

Normering:

1. : 10+8+2 pt

2. : 4+7+6 pt

3. : 2+12+3 pt

4. : 4+8+8 pt

5. : 16 pt