Tentamen Lineaire algebra 2
6 januari 2009, 10:00–13:00

Dit is *geen* open-boek-tentamen. Alleen de hulp van een niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan.

Motiveer al je antwoorden!

Opgave 1. Laat V de 1-dimensionale deelruimte zijn van de reële vectorruimte $\mathbb{R}^3$ die wordt opgespannen door de vector $(2, -1, 1)$. Laat $\sigma\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de spiegeling in V zijn.

(a) Geef de matrix van σ ten opzichte van de standaardbasis van $\mathbb{R}^3$.

(b) Geef een basis van $\mathbb{R}^3$ bestaande uit eigenvectoren van σ.

(c) Is σ een normale afbeelding?

Opgave 2. Laat $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{C}^4\colon\ x + iy - z - iw = 0\}$.

(a) Geef een basis van V als vectorruimte over $\mathbb{C}$.

(b) Geef een basis van V als vectorruimte over $\mathbb{R}$.

(c) Geef een orthonormale basis van V als vectorruimte over $\mathbb{C}$, met het standaard hermites inproduct van $\mathbb{C}^4$.

Opgave 3. Beschouw de kwadratische vorm $q(x, y) = 11x^2 - 16xy - y^2$.

(a) Bepaal een symmetrische matrix A zodat

$$q(x, y) = (x, y)\ A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(b) Bepaal twee reële getallen a, b en een orthogonale afbeelding f van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}^2$ zodat $q(f(u, v)) = au^2 + bv^2$ voor all $u, v \in \mathbb{R}$.

(c) Welke waarden neemt $q(x, y)$ aan op de eenheidscirkel $x^2 + y^2 = 1$?

Opgaven 4 en 5: **Z.O.Z.**

Opgave 4. In deze opgave is steeds de vraag of er een reële 4×4-matrix A bestaat met de gevraagde eigenschap. Geef zo'n matrix A of bewijs dat die niet bestaat. Laat I de 4×4-identiteitsmatrix zijn.

(a) $A^2 = 0$ en A heeft rang 1;

(b) $A^2 = 0$ en A heeft rang 2;

(c) $A^2 = 0$ en A heeft rang 3;

(d) A heeft rang 2, en $A - I$ heeft rang 1;

(e) A heeft rang 2, en $A - I$ heeft rang 2;

(f) A heeft rang 2, en $A - I$ heeft rang 3.

Opgave 5. Laat F de reële vectorruimte van differentieerbare functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ zijn. Definieer voor $i = 0, 1, 2$ de functie $p_i \in F$ door $p_i(x) = x^i$, en laat V de deelruimte van F zijn die wordt opgespannen door p_0, p_1 en p_2.

(a) Bewijs dat V dimensie 3 heeft.

Laat de lineaire afbeelding $T\colon V \to V$ gegeven zijn door $T(f) = f - f'$, waarbij f' de afgeleide van f is.

(b) Wat zijn de gegeneraliseerde eigenruimten van T op V?

(c) Geef de Jordan-normaalvorm van T.

(d) Geef lineaire afbeeldingen $D, N\colon V \to V$, met D diagonaliseerbaar, N nilpotent, $DN = ND$, en $T = D + N$.

(e) Bereken $T^{100}(p_2)$.

— SUCCES!! —