Tentamen Lineaire algebra 2
5 januari 2010, 10:00–13:00

Het tentamen is *geen* open-boek-tentamen. Alleen de hulp van een niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan.

Motiveer al je antwoorden!

Opgave 1. Bepaal alle $x \in \mathbb{R}$ waarvoor de matrix

$$\begin{pmatrix} -x & 3 & -15 \\ x & -4 & 17 \\ 4 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

nilpotent is.

Opgave 2. Beschouw de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

(a) Geef de eigenwaarden en eigenruimten van A.

(b) Geef een diagonaalmatrix D en een nilpotente matrix N waarvoor geldt $D + N = A$ en $DN = ND$.

(c) Geef een formule voor A^n met $n = 1, 2, 3, \ldots$

Opgave 3. Geef de Jordan normaalvorm van de matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

— Z.O.Z. —

Opgave 4. Beschouw de quadratische vorm $q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$q(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = 3x^2 - 4xy.$$

(a) Geef een symmetrische matrix A zodat

$$q(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = (x\ y) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(b) Bepaal $a, b \in \mathbb{R}$ en een orthogonale $2{\times}2$-matrix C waarvoor $q(C \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}) = au^2 + bv^2$ voor alle $u, v \in \mathbb{R}$.

(c) Welke waarden neemt q aan op de eenheidscirkel in $\mathbb{R}^2$?

Opgave 5. Voor $x \in \mathbb{R}$ beschouwen we de symmetrische matrix

$$A_x = \begin{pmatrix} x & -1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$$

(a) Wat is de signatuur van A_1, en van A_{-1}?

(b) Voor welke x is A_x positief definiet?

(c) Voor welke x is $\begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ -1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ positief definiet?

— SUCCES!! —