Tentamen Lineaire algebra 2

23 maart 2010, 10:00–13:00

Het tentamen is *geen* open-boek-tentamen. Alleen de hulp van een niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan.

Motiveer al je antwoorden!

Opgave 1. Beschouw de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Bepaal het karakteristieke polynoom van A.

(b) Bepaal de eigenwaarden van A.

(c) Is A diagonaliseerbaar?

Opgave 2. Geef de Jordan normaalvorm van de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Opgave 3. Laat V de vectorruimte van alle functies $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zijn. Laat W de deelruimte van V zijn, die wordt opgespannen door de drie functies $x \mapsto x$, $x \mapsto \sin(x)$, en $x \mapsto e^x$.

(a) Laat zien dat de afbeelding $\varphi\colon V \to \mathbb{R}^3$ die $f \in V$ stuurt naar $\varphi(f) = (f(0), f(1), f(\pi))$ lineair is.

(b) Laat zien dat $\phi(W)$ dimensie 3 heeft, en dat W dimensie 3 heeft.

(c) Bewijs dat er getallen $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ bestaan zodat voor alle $f \in W$ geldt: $f'(0) = a_1 f(0) + a_2 f(1) + a_3 f(\pi)$. Hier is f' de afgeleide van f.

— Z.O.Z. —

Opgave 4. Beschouw de quadratische vorm q: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$q(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = 11x^2 + 19y^2 - 6xy$$

(a) Geef een symmetrische matrix A zodat

$$q(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = (x\ y) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(b) Bepaal $a, b \in \mathbb{R}$ en een orthogonale 2×2-matrix C waarvoor $q(C\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}) = au^2 + bv^2$ voor alle $u, v \in \mathbb{R}$.

(c) Welke waarden neemt q aan op de eenheidscirkel in $\mathbb{R}^2$?

Opgave 5. Voor $x \in \mathbb{R}$ beschouwen we de symmetrische matrix

$$A_x = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$$

(a) Wat is de signatuur van A_0, en van A_2?

(b) Voor welke x is A_x positief definiet?

(c) Voor welke x is $\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix}$ positief definiet?

(d) Voor welke x is $\begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}$ positief definiet?

— SUCCES!! —