

Hertentamen Lineaire algebra 2
22 maart 2011, 9:00–12:00, zaal B1/2 Snellius

Het tentamen is *geen* open-boek-tentamen. Alleen de hulp van een niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan.

Motiveer al je antwoorden!

Opgave 1. De schaakbordmatrix A is de 8 bij 8 matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bereken de beeldruimte en de rang van A .
- (b) Laat zien dat de beeldruimte van A een eigenruimte is van A , en bepaal de eigenwaarde.
- (c) Laat zien dat A diagonaliseerbaar is.
- (d) Geef het minimum polynoom van A .
- (e) Geef het karakteristiek polynoom van A .

Opgave 2. Geef de Jordan-normaalvorm van de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Opgave 3. Laat $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

- (a) Geef matrices D en N met D diagonaliseerbaar, N nilpotent, $DN = ND$ en $A = D + N$.
- (b) Bereken A^{2011} .

Opgave 4. Laat V de vectorruimte van alle functies $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zijn. Laat W de deelruimte van V zijn die wordt opgespannen door de drie functies $x \mapsto 1$, $x \mapsto x$ en $x \mapsto \sin(\pi x)$. Voor $i = 1, 2, 3$ definiëren we $\phi_i \in W^*$ door $\phi_i(f) = f(x_i)$, waarbij $x_1 = 0, x_2 = 1/2, x_3 = 1$.

- (a) Laat zien dat ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 een basis is van W^* .
- (b) Bewijs dat W dimensie 3 heeft.
- (c) Geef de basis van W die dual is met de basis ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 van W^* .

Opgave 5. Laat V de vectorruimte over \mathbb{C} zijn van alle continue functies $[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$. Definieer $B: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ door $B(f, g) = \int_0^1 f(t)\overline{g(1-t)}dt$.

- (a) Is B bilineair?
- (b) Is B sesquilineair?
- (c) Is B een Hermitesese vorm (Engels: “Hermetian form”) op V ?
- (d) Is B een inproduct op V ?

(Motiveer je antwoorden.)

— SUCCES!! —