Tentamen Lineaire algebra 2

24 januari 2012, 14:00–17:00, Gorlaeus C4/5

Het tentamen is *geen* open-boek-tentamen. Alleen de hulp van een niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan.

Motiveer al je antwoorden!

Opgave 1. Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Wat is de rang van A?

(b) Wat is het karakteristiek polynoom van A?

(c) Is A diagonaliseerbaar over $\mathbb{R}$?

Opgave 2. Definieer de matrix A door

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Geef een diagonaliseerbare matrix D en een nilpotente matrix N zodat $A = D + N$ en $DN = ND$.

(b) Bereken $e^A = \exp(A)$.

Opgave 3. Laat V een vectorruimte over $\mathbb{R}$ zijn, en laat $\phi, \psi \in V^*$. Bewijs dat de afbeelding $V \to \mathbb{R}^2$ gegeven door $v \mapsto (\phi(v), \psi(v))$ surjectief is dan en slechts dan als ϕ en ψ lineair onafhankelijke zijn in V^*.

— Z.O.Z. —

Opgave 4. Voor $x \in \mathbb{R}$ beschouwen we de matrix

$$A_x = \begin{pmatrix} x & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix}$$

(a) Bereken de determinant van A_x.

(b) Voor welke $x \in \mathbb{R}$ is A_x positief definiet?

Opgave 5. Laat V de reële vectorruimte van alle polynomiale functies $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zijn. Definieer een inproduct op V door

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

.

(a) Bereken de lengte $||f||$ van de functie $f \in V$ gedefinieerd door $f(x) = x^2 - x$.

(b) Geef een orthonormale basis van de deelruimte V_1 van V opgespannen door de twee functies $x \mapsto 1$ en $x \mapsto x$.

(c) Bereken de orthogonale projectie van de functie $x \mapsto x^4$ op V_1.

— SUCCES!! —