Hertentamen Lineaire algebra 2

10 april 2012, 10:00–13:00, Zaal B1

Het tentamen is *geen* open-boek-tentamen. Alleen de hulp van een niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan.

Motiveer al je antwoorden!

Opgave 1. Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -10 & -14 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Wat is de rang van A?

(b) Wat is het karakteristiek polynoom van A?

(c) Is A diagonaliseerbaar over $\mathbb{R}$?

Opgave 2. Definieer de matrix A door

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$$

(a) Bepaal de eigenwaarden en de bijbehorende eigenruimten van f.

(b) Geef een diagonaliseerbare matrix D en een nilpotente matrix N zodat $A = D + N$ en $DN = ND$.

(c) Bereken A^{1000}.

Opgave 3. Laat V een vectorruimte over $\mathbb{R}$ zijn van dimensie 10, en stel dat $f\colon V \to V$ een lineaire afbeelding is met $f^3 = 0$. Bewijs dat de kern van f dimensie minstens 4 heeft.

— Z.O.Z. —

Opgave 4. Laat $V = \mathbb{C}^3$ de driedimensional vectorruimte zijn over $\mathbb{C}$, en laat $v = (1, i, -i) \in V$. Laat $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ de $\mathbb{C}$-lineaire afbeelding zijn gegeven door $f(w) = \langle w, v \rangle \cdot v$, waarbij $\langle \cdot, \cdot \rangle$ het standaard hermitese inproduct op V is.

(a) Bepaal de eigenwaarden en de bijbehorende eigenruimten van f.

(b) Is f diagonaliseerbaar?

(c) Laat zien dat f zelfgeadjungeerd (*selfadjoint*) is.

Opgave 5. Voor $x \in \mathbb{R}$ beschouwen we de matrix

$$A_x = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4-x \end{pmatrix}$$

(a) Bereken de determinant van A_x.

(b) Voor welke $x \in \mathbb{R}$ is A_x positief definiet?

— SUCCES!! —