Tentamen Lineaire algebra 2

22 januari 2013, 10:00–13:00, Gorlaeus C4/5

Het tentamen is *geen* open-boek-tentamen. Alleen de hulp van een niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan.

Motiveer al je antwoorden!

Opgave 1. Voor $x \in \mathbb{R}$ beschouwen we de matrix $A_x = \begin{pmatrix} 1 & x & 2 \\ 0 & 1 & x+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Geef de Jordan-Normaalvorm van A_1.

(b) Geef de Jordan-Normaalvorm van A_0.

(c) Voor welke $x \in \mathbb{R}$ is A_x diagonaliseerbaar?

(d) Bereken de matrix $e^{A_x} = \exp(A_x)$.

Opgave 2. Beschouw de vectorruimte V van polynomiale functies $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ van graad op zijn hoogst 2. Definieer een bilineaire afbeelding $V \times V \to \mathbb{R}$ door $(f, g) \mapsto \langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.

(a) Bewijs dat dit een inproduct op V is.

(b) Geef een orthonormale basis van V ten opzichte van dit inproduct.

(c) Definieer $\phi \in V^*$ door $\phi(f) = f(2)$. Laat zien dat er een element $g \in V$ is zodat $\phi(f) = \langle g, f\rangle$ voor alle $f \in V$.

Opgave 3. Beschouw de kwadratische vorm $q(x, y) = 17x^2 + 12xy + 22y^2$

(a) Bepaal een symmetrische matrix A zodat

$$q(x, y) = (x, y)\ A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(b) Bepaal twee reële getallen a, b en een orthogonale afbeelding f van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}^2$ zodat $q(f(u, v)) = au^2 + bv^2$ voor all $u, v \in \mathbb{R}$.

(c) Welke waarden neemt $q(x, y)$ aan op de eenheidscirkel $x^2 + y^2 = 1$?

— ZOZ!! —

Opgave 4. Laat V een eindig dimensionale vectorruimte over $\mathbb{R}$ zijn, en $f\colon V \times V \to \mathbb{R}$ een symmetrische bilineaire vorm. Neem aan dat f niet-gedegenereerd is. Laat U een deelruimte van V zijn, en laat ϕ de beperking van f tot $U \times U$ zijn.

(a) Bewijs dat ϕ een symmetrische bilineaire vorm op U is.

(b) Geef een voorbeeld van f, V, U als boven waarbij ϕ gedegenereerd is.

(c) Laat zien dat $\dim U \leq \frac{1}{2} \dim V$ als ϕ de nulafbeelding is.

— SUCCES!! —