Tentamen Lineaire algebra 2

2 april 2013, 14:00–17:00, zaal B1/B3

Het tentamen is *geen* open-boek-tentamen. Alleen de hulp van een niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan.

Motiveer al je antwoorden!

Opgave 1. Laat $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Bepaal de eigenwaarden van A.

(b) Is A diagonaliseerbaar?

(c) Geef de Jordan-normaalvorm van A.

(d) Geef de Jordan-normaalvorm van A^2.

Opgave 2. Voor $x \in \mathbb{R}$ definiëren we de matrix A_x door

$$A_x = \begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Voor welke $x \in \mathbb{R}$ is A_x positief definiet?

(b) Voor welke $x \in \mathbb{R}$ is A_x negatief definiet?

(c) Wat is de signatuur van A_{-1}?

— ZOZ!! —

Opgave 3. Laat V en W vectorruimten over $\mathbb{R}$ zijn van dimensie 3 en 4 respectievelijk. Laat $\phi\colon V \times W \to \mathbb{R}$ een bilineaire afbeelding zijn.

(a) Geef de definitie van de geïnduceerde lineaire afbeelding $\phi_R\colon W \to V^*$.

(b) Laat zien dat ϕ_R een niet-triviale kern heeft.

(c) Laat zien dat er een $w \in W$ is met deze twee eigenschappen:

(1) $w \neq 0$;

(2) $\phi(v, w) = 0$ voor alle $v \in V$.

(d) Geef een voorbeeld van zulke V, W, ϕ met de eigenschap dat voor elke $v \in V$ met $v \neq 0$ er een $w \in W$ is met $\phi(v, w) \neq 0$.

Opgave 4. Beschouw de kwadratische vorm $q(x, y) = 14x^2 - 6xy + 6y^2$

(a) Bepaal een symmetrische matrix A zodat

$$q(x, y) = (x, y)\ A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(b) Bepaal twee reële getallen a, b en een orthogonale afbeelding f van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}^2$ zodat $q(f(u, v)) = au^2 + bv^2$ voor all $u, v \in \mathbb{R}$.

(c) Welke waarden neemt $q(x, y)$ aan op de eenheidscirkel $x^2 + y^2 = 1$?

— SUCCES!! —