Tentamen lineaire algebra 2
17 april 2014, 14:00 – 17:00
zalen 174, 412

Dit is *geen* openboektentamen. Alleen niet-programmeerbare rekenmachines zijn toegestaan. Bewijs je antwoorden.

Opgave 1.

(a) Bepaal de Jordannormaalvorm, inclusief de bijbehorende coördinatentransformatie, van de matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Bereken de matrix $\exp(A) = e^A$.

Opgave 2. Zij $\phi : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ de symmetrische bilineaire vorm gegeven door de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal een basis van $\mathbf{R}^3$ ten opzichte waarvan ϕ gegeven wordt door een diagonaalmatrix.

(b) Bepaal de rang en de signatuur van ϕ.

Opgave 3. Beschouw de kwadratische vorm $q(x, y) = x^2 - 6xy + y^2$.

(a) Bepaal een symmetrische matrix A zodat voor alle $x, y \in \mathbf{R}$ geldt

$$q(x, y) = (x, y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(b) Bepaal twee reële getallen a, b en een isometrie $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ zodat geldt $q(f(u, v)) = au^2 + bv^2$ voor alle $u, v \in \mathbf{R}$.

Opgaven 4 en 5 staan op de volgende pagina

Opgave 4. Geef een voorbeeld of bewijs dat niet bestaat:
(bewijs altijd je antwoord)

(a) Een lineaire afbeelding $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ die normaal is, maar niet zelfgeadjungeerd (self-adjoint).

(b) Een isomorfisme $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ dat normaal is, maar geen isometrie.

(c) Een lineaire afbeelding $h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ die normaal is, maar niet orthodiagonaliseerbaar over $\mathbf{R}$.

Opgave 5. Zij V de reële vectorruimte van polynomen van graad ≤ 2 over $\mathbf{R}$ en definiëer voor elk geheel getal $i \in \mathbf{Z}$ de afbeelding

$$\begin{aligned} \psi_i : \quad & V \times V \longrightarrow \mathbf{R}, \\ (p(x), q(x)) & \longmapsto \int_{-1}^{1} p(x)q(x-i)dx. \end{aligned}$$

(a) Geef de definitie van een bilineaire vorm, en bewijs voor alle $i \in \mathbf{Z}$ dat ψ_i een bilineaire vorm is.

(b) Voor welke i is ψ_i een inprodukt?

(c) Definieer $\chi \in V^*$ door $\chi(p) = p(2)$. Laat zien dat er een element $q \in V$ is met voor alle $p \in V$: $\chi(p) = \psi_0(p, q)$.