Tentamen lineaire algebra 2
17 januari 2014, 10:00 – 13:00
zalen 174, 312, 412, 401, 402

Dit is *geen* openboektentamen. Alleen niet-programmeerbare rekenmachines zijn toegestaan. Bewijs je antwoorden.

Opgave 1. Beschouw de reële matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal de Jordannormaalvorm van A, inclusief de bijbehorende basistransformatie.

(b) Vind een diagonaliseerbare matrix D en een nilpotente matrix N zodat $B = D + N$ en $ND = DN$.

(c) Bepaal B^{2014}.

Opgave 2. Zij $\phi : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ de symmetrische bilineaire vorm gegeven door de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal een basis van $\mathbf{R}^2$ ten opzichte waarvan ϕ gegeven wordt door een diagonaalmatrix.

(b) Bepaal de rang en de signatuur van ϕ.

(c) Beantwoord (a) en (b) ook met $\mathbf{R}^2$ vervangen door $\mathbf{R}^3$ en

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Opgaven 3 en 4 staan op de volgende pagina

Opgave 3. Beschouw de kwadratische vorm $q(x, y) = 7x^2 + 12xy - 2y^2$.

(a) Bepaal een symmetrische matrix A zodat voor alle $x, y \in \mathbf{R}$ geldt

$$q(x, y) = (x, y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(b) Bepaal twee reële getallen a, b en een orthogonale afbeelding $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ zodat geldt $q(f(u, v)) = au^2 + bv^2$ voor alle $u, v \in \mathbf{R}$.

(c) Welke waarden neemt $q(x, y)$ aan op de eenheidscirkel $x^2 + y^2 = 1$?

Opgave 4. Beantwoord voor elk van de lineaire afbeeldingen f in (a)–(c) de vragen (i)–(iii). Er worden dus $3 \times 3 = 9$ antwoorden verwacht, inclusief negen bewijzen.

(a) Zij $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ de rotatie van 60 graden om de oorsprong. Hierbij heeft $\mathbf{R}^2$ het standaardinprodukt.

(b) Zij $f : \mathbf{C}^4 \to \mathbf{C}^4$ gegeven door $f(w) = w - \langle w, v \rangle v$ met $v = (7+i, 5-3i, 2, i)$. Hierbij heeft $\mathbf{C}^4$ het standaardinprodukt.

(c) Zij V de reële vectorruimte van polynomiale functies van graad ten hoogste 2 met het inprodukt

$$\langle p_1(x), p_2(x) \rangle = \int_{-1}^{1} p_1(x) p_2(x) dx$$

en zij $f : V \to V$ gegeven door $f(p(x)) = p'(x)$, de afgeleide van $p(x)$.

(i) Is f normaal?

(ii) Is f zelf-geadjungeerd?

(iii) Is f een isometrie?