Tentamen Numerieke Wiskunde 1 (NIEUW)

woensdag 28 mei 2003, 14.10-17.10, Huygens Laboratorium, zaal 226

Dit tentamen bestaat uit vijf opgaven

---

1. We willen $97-56\sqrt{3}$ benaderen, gebruikmakend van de benadering $\alpha = 1.73$ van $\sqrt{3} = 1.73205\cdots$. Ingegeven door de observatie dat
$$97 - 56\sqrt{3} = \frac{1}{97+56\sqrt{3}}\ ,$$
overwegen we twee alternatieven, namelijk het berekenen van
$$97 - 56\alpha \text{ en van } \frac{1}{97+56\alpha}\ .$$
Aan welk alternatief moet de voorkeur gegeven worden? Verklaar uw antwoord.

2. a. Bepaal *met de interpolatiemethode van Newton* een uitdrukking voor het polynoom p van graad ten hoogste 3 dat voldoet aan $p(0) = 3$, $p(1) = 5$, $p(3) = 3$ en $p(5) = 33$.

   b. Laat $\delta \in \mathbb{R}$ en zij p_δ het polynoom van graad ten hoogste 3 dat voldoet aan $p(0) = 3+\delta$, $p(1) = 5$, $p(3) = 3$ en $p(5) = 33$. Laat, zonder gebruik te maken van een expliciet berekende uitdrukking voor p of voor p_δ, zien dat
$$p_\delta(4) - p(4) = \frac{\delta}{5}.$$

3. a. Voor $f \in C[0,6]$ hanteren we de kwadratuurregel
$$\widetilde{I}(f) = -6f(1) + 12f(2)$$
als benadering van de integraal
$$I(f) = \int_0^6 f(x)\,dx.$$
Bepaal de precisie van deze regel.

   b. Voor iedere $n = 0, 1, 2, \ldots$ kiezen we $n+1$ punten $0 \leq x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_{n-1}^{(n)} < x_n^{(n)} \leq 1$ in het interval $[0,1]$. Zij p_n het polynoom van graad ten hoogste n, dat voor $i = 0, \ldots, n$ voldoet aan $p_n(x_i^{(n)}) = \sin(x_i^{(n)})$. Laat zien dat
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 p_n(x)\,dx = \int_0^1 \sin(x)\,dx.$$

4. a. i. Beschouw, voor een gegeven reguliere complexe $n \times n$-matrix A en een gegeven $b \in \mathbb{C}^n$, het stelsel $Ax = b$. Leg uit hoe men, uitgaande van een splitsing $A = N - P$ (waarbij N regulier is), een iteratief proces construeert dat, indien het convergent is, convergeert naar de oplossing van het stelsel.

   ii. Geef een nodige en voldoende voorwaarde voor de convergentie van het proces in het vorige onderdeel.

   b. Beschouw het stelsel

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   i. Geef de iteratiestap van een *convergent* proces, als bedoeld in onderdeel a, uitgaande van een door u geschikt gekozen splitsing $A = N - P$.

   ii. Op grond waarvan concludeert u, dat het door u in het vorige onderdeel gedefinieerde proces inderdaad convergent is?

5. Beschouw het randwaardeprobleem

$$\begin{cases} -((x+1)u')' = \cos(x^2+1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

op $[0,1]$. Dit probleem heeft een unieke oplossing $u \in C^2[0,1]$.
Geef aan, hoe men met behulp van de eindige elementen methode een rij $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ van continue stuksgewijs lineaire functies $u_n : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ kan bepalen, zodanig dat $u_n(0) = u_n(1) = 0$ voor alle n, en tevens

$$\lim_{n\to\infty} \|u - u_n\|_{[0,1],\infty} = 0.$$

U hoeft geen berekeningen daadwerkelijk uit te voeren of een theoretische achtergrond te geven: een "receptmatige" omschrijving is voldoende. Wanneer u gebruik maakt van functies van een speciaal type, dan kunt u voor de beschrijving van die functies volstaan met een duidelijke schets van de grafiek ervan.

Het gebruik van een rekenmachine is toegestaan