Tentamen Numerieke Wiskunde 1 (NIEUW)

vrijdag 8 augustus 2003, 14.10-17.10, Huygens Laboratorium, zaal 207

Dit tentamen bestaat uit vijf opgaven

---

1. De vergelijking $x^3 - x - 1 = 0$ heeft precies één reële oplossing α, waarvoor men eenvoudig kan inzien dat $\alpha^5 = \alpha^2 + \alpha + 1$. Neem aan dat we de benadering $\widetilde{\alpha} = 1.32$ van $\alpha = 1.3247\cdots$ tot onze beschikking hebben, die we willen gebruiken om α^5 te benaderen. We zien hiervoor op grond van het bovenstaande twee alternatieven, nl. het berekenen van $\widetilde{\alpha}^5$ en van $\widetilde{\alpha}^2+\widetilde{\alpha}+1$.

   Aan welk alternatief moet de voorkeur gegeven worden? Verklaar uw antwoord.

2. We willen de functie e^x op een interval $[1, b]$ benaderen met een polynoom. We kiezen daartoe $q + 1$ punten $1 = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_q \leq b$ in $[1, b]$, en beschouwen het polynoom p van graad ten hoogste q zodanig dat $p(\xi_i) = e^{\xi_i}$ voor $i = 0, 1, \ldots, q$.

   a. Beschrijf hoe men met de interpolatiemethode van Newton het polynoom p kan bepalen.

   Veronderstel nu, dat we voor de functiewaarde in $\xi_0 = 1$ slechts een benadering $\widetilde{e} \geq e$ van e ter beschikking hebben. We onderzoeken in hoeverre deze verstoring doorwerkt in de geïnterpoleerde waarden in het naastgelegen subinterval, d.w.z. in $[\xi_0, \xi_1]$, en beschouwen daartoe (dus) het polynoom $\widetilde{p}$ van graad ten hoogste q zodanig dat

   $$\widetilde{p}(\xi_0) = \widetilde{e} \text{ en } \widetilde{p}(\xi_i) = e^{\xi_i} \ (i = 1, \ldots, q).$$

   b. Bewijs dat $\widetilde{p}(x) - p(x) \in [0, \widetilde{e} - e]$ voor alle $x \in [\xi_0, \xi_1]$.

3. a. Formuleer de trapeziumregel voor continue functies op een interval $[a, b]$ en leidt de precisie van deze regel af.

   b. Voor iedere $n = 0, 1, 2, \ldots$ kiezen we $n + 1$ punten $1002 \leq x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_{n-1}^{(n)} < x_n^{(n)} \leq 2003$ in het interval $[1002, 2003]$. Zij p_n het polynoom van graad ten hoogste n, dat voor $i = 0, \ldots, n$ voldoet aan $p_n(x_i^{(n)}) = \dfrac{1}{x_i^{(n)}}$. Laat zien dat

   $$\lim_{n\to\infty} \int_{1002}^{2003} p_n(x)\, dx = \int_{1002}^{2003} \frac{1}{x}\, dx.$$

4. Beschouw de matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 14 \end{pmatrix}.$$

   a. Wat is de skyline van A?

   b. Gegeven is hier, dat A strikt positief definiet is, zodat A een Cholesky-decompositie heeft. Leg uit wat deze decompositie inhoudt en bereken de Cholesky-decompositie van A.

   c. Voer een skyline-controle uit op de decompositie in het vorige onderdeel en formuleer het theoretisch resultaat dat aan deze controle ten grondslag ligt.

5. Beschouw het randwaardeprobleem
$$\begin{cases} -(e^{x^2}u')' = \sqrt{x+1} \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$
op $[0,1]$. Dit probleem heeft een unieke oplossing $u \in C^2[0,1]$.
Geef aan, hoe men met behulp van de eindige elementen methode een rij $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ van continue stuksgewijs lineaire functies $u_n : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ kan bepalen, zodanig dat $u_n(0) = u_n(1) = 0$ voor alle n, en tevens
$$\lim_{n\to\infty} \|u - u_n\|_{[0,1],\infty} = 0.$$
U hoeft geen berekeningen daadwerkelijk uit te voeren of een theoretische achtergrond te geven: een "receptmatige" omschrijving is voldoende. Wanneer u gebruik maakt van functies van een speciaal type, dan kunt u voor de beschrijving van die functies volstaan met een duidelijke schets van de grafiek ervan.

Het gebruik van een rekenmachine is toegestaan