Tentamen Numerieke Wiskunde 1

maaandag 7 juni 2004, 14.00-17.00

Dit tentamen bestaat uit vijf opgaven

---

1. We willen $3+2\sqrt{2}$ benaderen, gebruikmakend van de benadering $\alpha = 1.41$ van $\sqrt{2} = 1.41421\cdots$. Omdat
$$3+2\sqrt{2} = \frac{1}{3-2\sqrt{2}}\,,$$
overwegen we twee manieren om dit te doen, namelijk het berekenen van
$$3+2\alpha$$
en van
$$\frac{1}{3-2\alpha}\,.$$
Welke van beide manieren is de beste? Verklaar (zonder de benaderingen daadwerkelijk te berekenen) uw antwoord.

2. Beschouw voor α met $0 < \alpha \le 1$ en $w_0, w_1 \in \mathbb{R}$ de kwadratuurregel
$$\widetilde{I}_{\alpha,w_0,w_1}(f) = w_0 f(-\alpha) + w_1 f(\alpha)$$
als benadering van de integraal
$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx.$$
voor $f \in C[-1,1]$.

   a. Welke waarden moeten de gewichten w_0 en w_1 hebben, opdat de precisie van $\widetilde{I}_{\alpha,w_0,w_1}$ tenminste 1 is?
   b. Laat zien dat er precies één tripel (α, w_0, w_1) bestaat, zodanig dat $\widetilde{I}_{\alpha,w_0,w_1}$ precisie tenminste 2 heeft.
   c. Wat is de precisie van de regel in onderdeel b?

3. a. Voor iedere $n = 1, 2, \ldots$ kiezen we $n+1$ punten $1 \le x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_{n-1}^{(n)} < x_n^{(n)} \le 2$ in het interval $[1,2]$. Zij p_n het polynoom van graad ten hoogste n, dat voor $i = 0, \ldots, n$ voldoet aan $p_n(x_i^{(n)}) = \ln x_i^{(n)}$. Laat zien dat
$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[1,2]} |p_n(x) - \ln x| = 0.$$

ZIE OMMEZIJDE

b. Laat $\mu \in \mathbb{R}$ en zij p_μ het polynoom van graad ten hoogste 5 dat voldoet aan $p_\mu(0) = \mu$, $p_\mu(1) = 1$, $p_\mu(2) = 2$, $p_\mu(4) = 4$, $p_\mu(8) = 8$ en $p_\mu(16) = 16$. Laat zien dat

$$p_{\mu_1}(10) - p_{\mu_2}(10) = \frac{81(\mu_1 - \mu_2)}{16} \quad (\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}).$$

4. a. i. Wanneer is een matrix strikt diagonaal dominant?

   ii. Een strikt diagonaal dominante matrix A heeft een ontbinding $A = LU$ in een onderdriehoeksmatrix L en een bovendriehoeksmatrix U. Bewijs dit, gebruikmakend van de theoretische resultaten van het college.

   b. Beschouw het stelsel

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   i. Geef de iteratiestap van een convergente iteratieve methode om dit stelsel op te lossen.

   ii. Op grond waarvan concludeert u, dat het door u in het vorige onderdeel gedefinieerde proces inderdaad convergent is?

5. Uitgaande van een startwaarde $x_0 \in \mathbb{R}$ definiëren we de rij $\{x_k\}_{k=0}^\infty \subset \mathbb{R}$ recursief door

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}x_k^2 + \frac{9}{50} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

   a. Bepaal de twee mogelijke limieten λ_1 en λ_2 van de rij $\{x_k\}_{k=0}^\infty$.

   b. Laat voor $i = 1, 2$ zien dat

$$x_{k+1} - \lambda_i = \frac{1}{2}(x_k + \lambda_i)(x_k - \lambda_i) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

   c. Indien men $0 \le x_0 < \frac{9}{5}$ kiest, dan geldt $\lim_{k\to\infty} x_k = \frac{1}{5}$. Bewijs dit.

   d. Indien men $x_0 > \frac{9}{5}$ kiest, dan geldt $\lim_{k\to\infty} x_k = \infty$. Bewijs dit.

   e. Beschrijf het limietgedrag van de rij $\{x_k\}_{k=0}^\infty$ voor alle mogelijke startwaarden $x_0 \in \mathbb{R}$.
   U kunt hierbij gebruik maken van de voorgaande onderdelen, ook wanneer u deze niet heeft opgelost.

Het gebruik van een rekenmachine is toegestaan