# Tentamen Numerieke Wiskunde 1

donderdag 19 augustus 2004, 10.00-13.00

*Dit tentamen bestaat uit vijf opgaven*

Het gebruik van een rekenmachine is toegestaan

---

1. We willen $\sqrt{2004}+\sqrt{1908}$ benaderen, gebruikmakend van een goede benadering $\alpha_1$ van $\sqrt{2004}$ en een eveneens goede benadering $\alpha_2$ van $\sqrt{1908}$. Omdat
$$\sqrt{2004}+\sqrt{1908}=\frac{96}{\sqrt{2004}-\sqrt{1908}}\,,$$
overwegen we twee manieren om dit te doen, namelijk het berekenen van
$$\alpha_1+\alpha_2$$
en van
$$\frac{96}{\alpha_1-\alpha_2}\,.$$
Welke van beide manieren verdient de voorkeur? Verklaar uw antwoord.

2. a. Bepaal *met de interpolatiemethode van Newton* een uitdrukking voor het polynoom $p_0$ van graad ten hoogste 3 dat voldoet aan $p_0(0)=1$, $p_0(1)=2$, $p_0(2)=-1$ en $p_0(4)=53$.

   b. Laat $\delta\in\mathbb{R}$ en zij $p_\delta$ het polynoom van graad ten hoogste 3 dat voldoet aan $p_\delta(0)=1$, $p_\delta(1)=2$, $p_\delta(2)=-1+\delta$ en $p_\delta(4)=53$. Laat, zonder gebruik te maken van een expliciet berekende uitdrukking voor $p_\delta$, zien dat
$$p_\delta(5)-p_0(5)=-5\delta.$$

3. a. Voor $f\in C[0,6]$ hanteren we de kwadratuurregel
$$\widetilde{I}(f)=f(0)+4f(3)+f(6)$$
als benadering van de integraal
$$I(f)=\int_0^6 f(x)\,dx.$$
Bepaal de precisie van deze regel.

**ZIE OMMEZIJDE**

b. Laat $q \in \{1,2,3,\ldots\}$ en zij $x_i^{(q)} = \dfrac{6i}{q}$ voor $i = 0,1,\ldots,q$. Laat $p_q$ het polynoom van graad ten hoogste $q$ zijn, zodanig dat $p_q\left(x_i^{(q)}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{20}x_i^{(q)}\right)$ voor $i = 0,1,\ldots,q$. Bepaal een waarde van $q$ waarvoor

$$\left|\int_0^6 p_q(x)\,dx - \int_0^6 \sin\left(\frac{\pi}{20}x\right)\,dx\right| < \frac{1}{100}.$$

4. a. Los *met behulp van een LU-decompositie* het volgende stelsel op:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

b. Beschouw het iteratieve proces in $\mathbb{R}^2$, gegeven door $x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en

$$x^{k+1} = Mx^k + c \quad (k = 0,1,2,\ldots),$$

waarbij

$$M = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.6 \\ -0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad c = \begin{pmatrix} -0.1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

i. Bereken de eventuele limiet $x^\infty$ van de rij $\{x^k\}_{k=0}^\infty$.

ii. Laat zien dat $x^{k+1} - x^\infty = M(x^k - x^\infty)$ voor $k = 0,1,2,\ldots$.

iii. De rij $\{x^k\}_{k=0}^\infty$ is inderdaad convergent. Waarom?

5. We willen met behulp van de methode van Newton een rij benaderingen $\{x_k\}_{k=0}^\infty$ van $\sqrt{7}$ construeren, uitgaande van een geschikte startwaarde $x_0$. Hiertoe beschouwen we de functie $f : (1,\infty) \mapsto \mathbb{R}$, gegeven door $f(x) = x^2 - 7$.

a. Laat zien dat de iteratiestap van de methode van Newton voor deze functie gegeven wordt door

$$x_{k+1} = \frac{x_k^2 + 7}{2x_k} \quad (k = 0,1,2,\ldots).$$

b. Veronderstel dat $x_k \geq \sqrt{7}$ voor zekere $k \in \{0,1,2,\ldots\}$. Laat zien dat dan $\sqrt{7} \leq x_{k+1} \leq x_k$.

c. Veronderstel dat $x_0 \geq \sqrt{7}$. Dan is $\lim_{k\to\infty} x_k = \sqrt{7}$. Laat dit zien. U kunt hierbij gebruik maken van de voorgaande onderdelen, ook wanneer u deze niet heeft opgelost.