Tentamen Numerieke Wiskunde 1 (oude stijl)

maandag 6 juni 2005, 14.00-17.00

Dit tentamen bestaat uit vijf opgaven

Het gebruik van een rekenmachine is toegestaan

Vermeld s.v.p. niet alleen uw naam, studentnummer en studie, maar ook uw email adres i.v.m. het doorgeven van het resultaat

---

1. De vergelijking $6x^3 - 6x - 2005 = 0$ heeft precies één reële oplossing α, waarvoor men eenvoudig kan inzien dat $\alpha^{-1} = \frac{6}{2005}(\alpha^2 - 1)$. Neem aan dat we de benadering $\widetilde{\alpha} = 7$ van $\alpha = 6.9874\cdots$ tot onze beschikking hebben, die we willen gebruiken om α^{-1} te benaderen. Op grond van het bovenstaande overwegen we twee manieren om dit te doen, namelijk het berekenen van $\widetilde{\alpha}^{-1}$ en het berekenen van $\frac{6}{2005}(\widetilde{\alpha}^2 - 1)$.

   Welke van beide manieren is de beste? Verklaar (zonder de benaderingen daadwerkelijk te berekenen) uw antwoord.

2. a. Bepaal *met de interpolatiemethode van Newton* een uitdrukking voor het polynoom p_0 van graad ten hoogste 3 dat voldoet aan $p_0(-1) = 0$, $p_0(0) = 1$, $p_0(1) = 6$ en $p_0(2) = 33$.

   b. Laat $\delta \in \mathbb{R}$ en zij p_δ het polynoom van graad ten hoogste 3 dat voldoet aan $p_\delta(-1) = 0$, $p_\delta(0) = 1 + \delta$, $p_\delta(1) = 6$ en $p_\delta(2) = 33$. Laat, zonder gebruik te maken van een expliciet berekende uitdrukking voor p_0 of voor p_δ, zien dat
   $$p_\delta(6) - p_0(6) = 70\delta.$$

3. a. Formuleer de trapeziumregel voor continue functies op een interval $[a, b]$ en leidt de precisie van deze regel af.

   b. Voor iedere $n = 0, 1, 2, \ldots$ kiezen we $n + 1$ punten $0 \leq x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_{n-1}^{(n)} < x_n^{(n)} \leq 1$ in het interval $[0, 1]$. Zij p_n het polynoom van graad ten hoogste n, dat voor $i = 0, \ldots, n$ voldoet aan $p_n(x_i^{(n)}) = e^{x_i^{(n)}}$. Laat zien dat
   $$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 p_n(x)\, dx = e - 1.$$

ZIE OMMEZIJDE

4. a. i. Beschouw, voor een gegeven reguliere complexe $n \times n$-matrix A en een gegeven $b \in \mathbb{C}^n$, het stelsel $Ax = b$. Leg uit hoe men, uitgaande van een splitsing $A = N - P$ (waarbij N regulier is), een iteratief proces construeert dat, indien het convergent is, convergeert naar de oplossing van het stelsel.

   ii. Geef een nodige en voldoende voorwaarde voor de convergentie van het proces in het vorige onderdeel.

   b. Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

   i. Wat is de skyline van A? En wat is de skyline van A^t?

   ii. Gegeven is hier, dat A een LU-decompositie heeft. Bepaal een dergelijke decompositie en voer hierop een skyline-controle uit, daarbij vermeldend welk theoretisch resultaat aan deze controle ten grondslag ligt.

   iii. Bepaal *met behulp van de decompositie uit het vorige onderdeel* de oplossing van het stelsel

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

5. a. Laat zien dat de vergelijking

$$\cos x - \frac{1}{3}x^3 - 2x = 0$$

   precies 1 reële oplossing x^* heeft.

   b. Toon aan dat x^* in het interval $[0, 1]$ ligt.

   c. Kies een startwaarde x_0 in $[-1, 1]$ en definieer de rij $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ recursief door

$$x_k = \frac{1}{2}\cos x_{k-1} - \frac{1}{6}x_{k-1}^3 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

   Laat zien dat de rij $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ naar x^* convergeert.