# Tentamen Projectieve Meetkunde

**10 juni 2010 14.00-17.00 uur**

**Opgave 1 (1p)**

Formuleer de duale stelling van Pappos.

**Opgave 2 (2p)**

We voorzien $\mathbb{P}^2$ van homogene coördinaten $(x_0 : x_1 : x_2)$. In $\mathbb{P}^2$ zijn gegeven de drie punten $p = (0 : p_1 : p_2)$, $q = (q_0 : 0 : q_2)$ en $r = (r_0 : r_1 : 0)$. Bewijs:

$$p, q \text{ en } r \text{ zijn collineair} \Leftrightarrow p_1 q_2 r_0 + p_2 q_0 r_1 = 0.$$

**Opgave 3**

**a) (3p)** Bepaal een parametervoorstelling voor de kegelsnede $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$.

**b) (3p)** Bepaal een vergelijking voor de kegelsnede gegeven door:

$$(x_0 : x_1 : x_2) = (\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2 : \mu^2 : \lambda^2 + \mu^2).$$

**Opgave 4**

Beschouw in $\mathbb{P}^2$, voorzien van homogene coördinaten $(x_0 : x_1 : x_2)$, de kegelsnede $K$ gegeven door de vergelijking $x_0^2 - x_1 x_2 = 0$. De lijn $L$ is de poollijn van $p = (0 : 1 : -1)$ ten opzicht van $K$.

**a) (2p)** Bepaal een vergelijking van $L$.

**b) (2p)** Bereken de twee snijpunten $q_1$ en $q_2$ van $L$ met $K$.

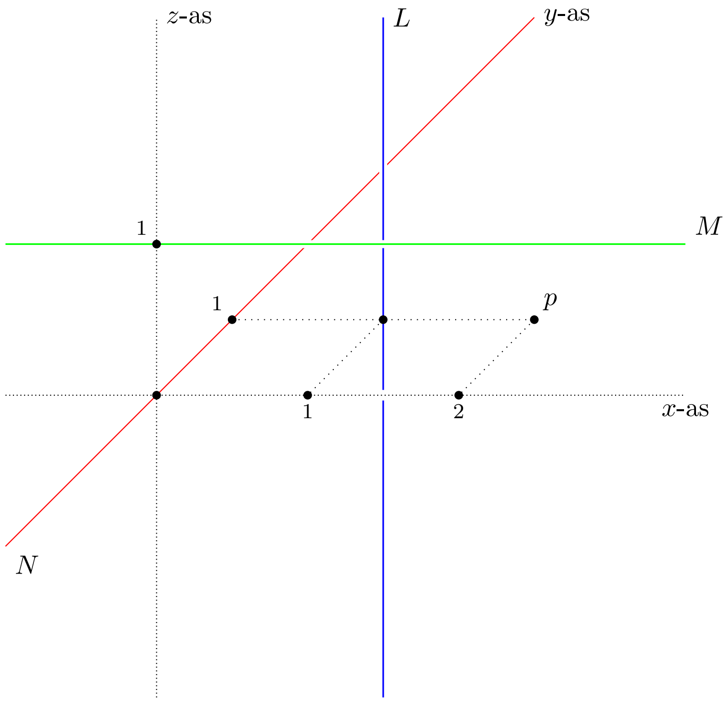
**c) (2p)** Verifieer dat de twee raaklijnen in $q_1$ en $q_2$ elkaar snijden in $p$.

**Opgave 5**

We stellen ons $\mathbb{R}^3$ (met coördinaten $(x, y, z)$) ingebed in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ voor. In $\mathbb{R}^3$ zijn drie kruisende lijnen gegeven:

$$\begin{aligned} L &:= \{(x, y, z) \mid x = y = 1\}, \\ M &:= \{(x, y, z) \mid y = 0 \wedge z = 1\}, \\ N &:= \{(x, y, z) \mid x = z = 0\}. \end{aligned}$$

Laat $Q$ de unieke gladde kwadriek in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ zijn die deze drie lijnen bevat, $V_\infty$ in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ het vlak op oneindig en $\tilde{L}$ de lijn $L$ inclusief zijn punt op oneindig. De lijnen $\tilde{M}$ en $\tilde{N}$ worden analoog gedefinieerd.




**Let op:** Goed kijken en nadenken kan je veel tijd besparen!

**a) (2p)** Bewijs dat er exact één projectieve lijn door het punt $p = (2, 1, 0)$ is, die de lijnen $\tilde{L}$, $\tilde{M}$ en $\tilde{N}$ snijdt.

**b) (2p)** Welke van $\tilde{L}$ verschillende lijn op $Q$ gaat er door het oneindig verre punt van $L$?

**c) (2p)** Ligt de $x$-as op $Q$?

**d) (3p)** Is $Q \cap V_\infty$ ontaard?

**Opgave 6**

Zij $A : \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ een projectieve transformatie van $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Voor iedere $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$ is het beeld onder $A$ van een $k$-dimensionale lineaire deelruimte van $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ weer een $k$-dimensionale lineaire deelruimte van $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Derhalve induceert $A$ dus voor iedere $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$ verzamelingstheoretisch een afbeeling $A_k : G(k+1, n+1) \to G(k+1, n+1)$.

**a) (2p)** Laat zien dat $A_k$ altijd bijectief is.

**b) (4p)** Stel $n = 3$ en neem $k = 1$. Zij $pl : G(2, 4) \to \mathbb{P}(\Lambda^2(\mathbb{C}^4))$ de Plücker-inbedding. Laat zien dat $A_1$ geïnduceerd wordt door een unieke projectieve transformatie van $\mathbb{P}(\Lambda^2(\mathbb{C}^4))$. Je moet dus twéé dingen laten zien: *existentie* en *uniciteit*!

**c) (3p)** Dezelfde vraag als **b)**, maar nu voor willekeurige $n$ en $k$.

Het cijfer $c$ wordt gedefinieerd door: $c := \min(10, f(1 + \frac{\text{totaal aantal punten}}{3}))$, waarin $f$ een afrondingsfunctie is.