Tentamen Projectieve Meetkunde

9 juni 2011 10.00-13.00 uur

1. (1 punt) Formuleer de duale stelling van Desargues.

2. (2 punten) Zij $A \subsetneq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ met de volgende eigenschap: iedere lijn l die niet bevat is in A, snijdt A in één punt. Bewijs dat A een lijn is.

3. We voorzien $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ van homogene coördinaten $(x_0 : x_1)$. De verzameling van projectieve transformaties van $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ wordt op natuurlijke wijze geparametriseerd door het complement van een gladde kwadriek in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

   (a) (1 punt) Laat zien, dat dit inderdaad zo is.

   (b) (1 punt) Beschrijf, in het verlengde van opgave a), de parametriserende verzameling van de projectieve transformaties waarvoor $(1 : 0)$ dekpunt is.

   (c) (2 punten) Een *involutie* is een projectieve transformatie T met $T^2 = id$. Bepaal de involuties waarvoor $(1 : 0)$ dekpunt is.

   (d) (2 punten) Bepaal de involutie $T \neq id_{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}$ met dekpunten $(1 : 0)$ en $(1 : 1)$.

   (e) (1 punt) Bereken de dubbelverhouding $((1 : 0), (1 : 1), (0 : 1), T(0 : 1))$ met T de involutie uit opgave d).

4. Voor elke $(\alpha : \beta) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ wordt de lijnenconfiguratie $L_{(\alpha:\beta)} \subset \mathbb{R}^3$ gedefinieerd door $L_{(\alpha:\beta)} := \{l, m, n\}$, met:

$$l = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}, n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}.$$

   Het is raadzaam van deze situatie voor jezelf eerst een goede schets te maken. Als je vervolgens ook nog goed nadenkt, zijn deze drie opgaven met weinig schrijfwerk te maken.

   (a) (2 punten) Voor welke $(\alpha : \beta) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ is de projectieve uitbreiding van $L_{(\alpha:\beta)}$ bevat in een gladde kwadriek in $\mathbb{P}^3$?

   (b) (1 punt) Zou het voor vraag a) uitmaken, als we $L_{(\alpha:\beta)}$ uitbreiden met $\zeta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$?

   (c) (2 punten) Welke van de gladde kwadrieken uit opgave a) snijden het vlak op oneindig in een gladde kegelsnede?

5. (a) (2 punten) Bepaal een parametervoorstelling voor de kegelsnede met vergelijking

$$2x_0^2 + 2x_0x_1 - 2x_1x_2 - x_2^2 = 0 \ .$$

   (b) (2 punten) Bepaal een vergelijking voor de kegelsnede met parametervoorstelling

$$(\lambda^2 : \lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu : \lambda^2 + \lambda\mu) \ .$$

6. Voor $K = \mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$ beschouw in het affiene vlak K^2 met coördinaten (x, y) de kwadratische krommen

$$K_i := \{(x, y) \in K^2 | f_i(x, y) = 0\}, i = 1, 2,$$

waarbij

$$f_1(x, y) := x^2 + (y-1)^2 - 1 \ , \ f_2(x, y) := x^2 + (y-2)^2 - 4 \ .$$

Laat Q_i de projectieve uitbreiding zijn van K_i in $\mathbb{P}(K^3), i = 1, 2$.

   (a) (1 punt) Schets K_1 en K_2 in $\mathbb{R}^2$.

   (b) (2 punten) Bepaal de snijpunten van Q_1 en Q_2 in de gevallen $K = \mathbb{R}$ en $K = \mathbb{C}$.

   (c) (2 punten) Bepaal in het geval $K = \mathbb{C}$ de multipliciteiten van de snijpunten.

7. Beschouw de Grassmann-variëteit $G = G(2, 4)$ van lijnen in de 3-dimensionale complex projectieve ruimte $\mathbb{P}^3 := \mathbb{P}(\mathbb{C}^4)$ via de Plücker-inbedding als deelverzameling van de 5-dimensionale ruimte $\mathbb{P}^5 := \mathbb{P}(\Lambda^2\mathbb{C}^4)$, en laat $G \not\supset H \subset \mathbb{P}^5$ een lineaire deelruimte zijn van dimensie 2. Omdat G een kwadriek in $\mathbb{P}^5$ is, is $H \cap G$ een kegelsnede in H.

   (a) (2 punten) Stel dat $H \cap G$ de vereniging is van twee verschillende lijnen. Met welk type lijnconfiguratie in $\mathbb{P}^3$ correspondeert dit? Beredeneer je antwoord.

   (b) (1 punt) Stel dat $H \cap G$ een gladde kegelsnede in H is. Met welk type lijnconfiguratie in $\mathbb{P}^3$ correspondeert dit? Het antwoord hoeft niet te worden beredeneerd.

   (c) (3 punten) Laat $L \subset G$ een lijn in $\mathbb{P}^5$ zijn. Laat zien dat er een vlak $H \subset \mathbb{P}^5$ is zodat $H \cap G = L$, d.w.z. zodat de kegelsnede $H \cap G$ een dubbeltellende lijn in H is.

Het cijfer c wordt gedefinieerd door: $c := \min(10, f(1 + \frac{\text{totaal aantal punten}}{3}))$, waarin f een afrondingsfunctie is.