Hertentamen Projectieve Meetkunde

23 augustus 2011 10.00-13.00 uur

1. (a) (2p) Formuleer en bewijs de Stelling van Pappos.

   (b) (1p) Formuleer de duale van de Stelling van Pappos.

2. Zij $\mathbb{P}^1$ de complexe projectieve rechte. Een projectieve afbeelding $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ heet een *involutie*, als $f^2 = id_{\mathbb{P}^1}$. Laat $p, q \in \mathbb{P}^1$ twee verschillende punten zijn.

   (a) (2p) Bewijs dat er precies twee involuties zijn die p en q invariant laten.

   (b) (2p) Zij $r \in \mathbb{P}^1$ een punt met $r \neq p, q$ en laat $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ een involutie zijn met $f \neq id_{\mathbb{P}^1}$, die p en q invariant laat. Bewijs:
   $$(p, q, r, f(r)) = -1.$$

3. Laat $\mathbb{P}(V)$ en $\mathbb{P}(W)$ twee projectieve ruimtes zijn met V en W eindig-dimensionale vectorruimtes over $\mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$.

   (a) (2p) Laat $f, g : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(W)$ twee projectieve afbeeldingen zijn, $H \subset \mathbb{P}(V)$ een hypervlak en $p, q \notin H$ twee verschillende punten buiten H. Bewijs:
   $$f = g \Leftrightarrow [f_{|H} = g_{|H} \wedge f(p) = g(p) \wedge f(q) = g(q)].$$
   Met andere woorden: een projectieve afbeelding wordt vastgelegd door zijn gedrag op een hypervlak en de beelden van twee punten buiten dat hypervlak.

   (b) (3p) Laat $H_1, H_2 \subset \mathbb{P}(V)$ twee hypervlakken zijn en $h : H_1 \longrightarrow H_2$ een projectieve afbeelding met de eigenschap: $h_{|H_1 \cap H_2} = id_{H_1 \cap H_2}$. Bewijs dat h een projectie vanuit een punt is.
   Hint: Gebruik opgave a.

4. Beschouw een projectief vlak met homogene coördinaten $(x_0 : x_1 : x_2)$.

   (a) (2p) Bepaal een vergelijking voor de kegelsnede met parametervoorstelling
   $$(x_0 : x_1 : x_2) = (\lambda^2 : \lambda\mu + \mu^2 : \lambda\mu - \mu^2).$$

   (b) (2p) Bepaal een parametervoorstelling van de kegelsnede met vergelijking
   $$x_0^2 + 2x_0x_2 - 2x_1x_2 = 0.$$

5. Beschouw $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ met homogene coördinaten $(x_0 : x_1 : x_2)$. Laat V de verzameling zijn van gladde kegelsneden in $\mathbb{P}$ die door $(1 : 0 : 0)$ en $(0 : 1 : 0)$ gaan, en die in $(0 : 0 : 1)$ raken aan de lijn met vergelijking $x_0 + x_1 = 0$.

   (a) (2p) Laat zien dat V een door $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ geparametriseerde familie van kegelsneden is.

   (b) (2p) Laat zien dat V door toevoeging van twee ontaarde kegelsneden, corresponderend met parameters 0 en ∞, op een nette manier kan worden uitgebreid tot een familie geparametriseerd door $\mathbb{P}^1$. Schets het affiene deel van deze twee ontaarde kegelsneden t.o.v. de oneindig verre lijn $\{x_2 = 0\}$.

6. Laat V een 4-dimensionale complexe vectorruimte zijn en $\mathbb{P} := \mathbb{P}(V)$, en $G := G(2, V)$ de Grassmannvariëteit van lijnen in $\mathbb{P}$. Laat $Q \subset \mathbb{P}$ een gladde kwadriek zijn gegeven door de symmetrische bilineaire vorm σ in V. Voor een lijn $L \subset \mathbb{P}$ definieer

$$pol(L) := \{ \ q \in \mathbb{P} \mid \forall \ p \in L \ : \ \sigma(p, q) = 0 \ \} \ .$$

   (a) (3p) Bewijs dat $pol(L)$ weer een lijn in $\mathbb{P}$ is, dus dat $L \mapsto pol(L)$ een afbeelding $pol : G \longrightarrow G$ definieert.

   (b) (2p) Bewijs dat pol een bijectieve afbeelding is, en bepaal de inverse.

   (c) (3p) Bewijs:

$$L \cap pol(L) \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad L \text{ raakt aan } Q \quad ; \quad L = pol(L) \quad \Leftrightarrow \quad L \subset Q \ .$$

   (d) (3p) Beschouw G via de Plücker-inbedding als deelverzameling van $\mathbb{P}(\Lambda^2(V))$, en laat $\mathcal{L}$ een lijn in $\mathbb{P}(\Lambda^2(V))$ zijn met $\mathcal{L} \subset G$. Hoe ziet de met $\mathcal{L}$ corresponderende verzameling van lijnen in $\mathbb{P}$ uit indien $pol(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$?

Het cijfer c wordt gedefinieerd door: $c := \min(10, f(1 + \frac{\text{totaal aantal punten}}{3}))$, waarin f een afrondingsfunctie is.