Tentamen Projectieve Meetkunde

21 juni 2012 10.00-13.00 uur

Opgave 1

Beschouw $\mathbb{P}^2$ met homogene coördinaten $(x_0 : x_1 : x_2)$.

a) (2p) Bepaal een vergelijking voor de kegelsnede met parametervoorstelling

$$(x_0 : x_1 : x_2) = (\lambda^2 + \mu^2 : \mu^2 - \lambda\mu : \lambda\mu) \ .$$

b) (2p) Bepaal een parametervoorstelling van de kegelsnede met vergelijking

$$x_0^2 + 4x_0x_2 - x_1^2 + x_2^2 = 0 \ .$$

Opgave 2 (2p)

We voorzien $\mathbb{P}^2$ van homogene coördinaten $(x_0 : x_1 : x_2)$. In $\mathbb{P}^2$ zijn gegeven de drie punten $p = (0 : p_1 : p_2)$, $q = (q_0 : 0 : q_2)$ en $r = (r_0 : r_1 : 0)$. Bewijs:

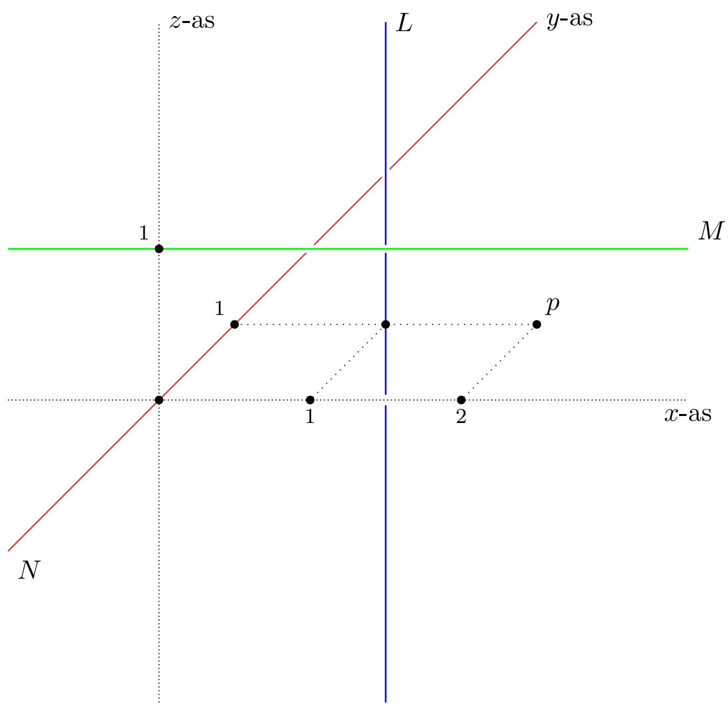
$$p, q \text{ en } r \text{ zijn collineair} \Leftrightarrow p_1q_2r_0 + p_2q_0r_1 = 0 \ .$$

Opgave 3

We stellen ons $\mathbb{R}^3$ (met coördinaten (x, y, z)) ingebed in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ voor. In $\mathbb{R}^3$ zijn drie kruisende lijnen gegeven:

$$\begin{aligned} L &:= \{(x, y, z) \mid x = y = 1\}, \\ M &:= \{(x, y, z) \mid y = 0 \wedge z = 1\}, \\ N &:= \{(x, y, z) \mid x = z = 0\}. \end{aligned}$$

Laat Q de unieke gladde kwadriek in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ zijn die deze drie lijnen bevat, V_∞ in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ het vlak op oneindig en $\tilde{L}$ de lijn L inclusief zijn punt op oneindig. De lijnen $\tilde{M}$ en $\tilde{N}$ worden analoog gedefinieerd.



Let op: Goed kijken en nadenken kan je veel tijd besparen!

a) (2p) Bewijs dat er exact één projectieve lijn door het punt $p = (2, 1, 0)$ is, die de lijnen $\tilde{L}$, $\tilde{M}$ en $\tilde{N}$ snijdt.

b) (2p) Welke van $\tilde{L}$ verschillende lijn op Q gaat er door het oneindig verre punt van L?

c) (2p) Ligt de x-as op Q?

d) (2p) Is $Q \cap V_\infty$ ontaard?

Opgave 4 (5p)

We beschouwen een willekeurig projectief vlak $\mathbb{P}$, niet noodzakelijkerwijs afkomstig van een vectorruimte. We noemen $\mathbb{P}$ *Desargiaans*, als de stelling van Desargues geldt:

Stelling 1 (Desargues)**.** *Zij gegeven in een projectief vlak $\mathbb{P}$ 6 punten p_1, p_2, p_3, q_1, q_2 en q_3, waarvan geen 4 op een rechte. Voor $i, j \in \{1, 2, 3\}, i < j$, is s_{ij} het snijpunt van $\overline{p_i p_j}$ met $\overline{q_i q_j}$:*

$$s_{ij} := \overline{p_i p_j} \cap \overline{q_i q_j}.$$

Als de drie lijnen $\overline{p_1 q_1}$, $\overline{p_2 q_2}$ en $\overline{p_3 q_3}$ concurrent zijn, zijn de drie punten s_{12}, s_{13} en s_{23} collineair.

Je mag in deze opgave gebruiken dat Desargues alleen interessant is, ingeval de 6 beginpunten onderling verschillend zijn en verschillen van $\overline{p_1 q_1} \cap \overline{p_2 q_2}$. Is dit namelijk niet het geval, dan is het collineair zijn van s_{12}, s_{13} en s_{23} in ieder projectief vlak een flauwiteit. Dit hoef je niet aan te tonen.

Het vlak $\mathbb{P}$ heeft *projectie-eigenschap* A, als het volgende geldt:

Gegeven 3 verschillende concurrente lijnen K, L en M en 2 projecties vanuit punten a en b:

$$\pi_a : K \to L \text{ en } \pi_b : L \to M.$$

Dan bestaat er een projectie $\pi_c : K \to M$ z.d.d. $\pi_c = \pi_b \circ \pi_a$. $\square$

Bewijs dat ieder projectief vlak met projectie-eigenschap A Desargiaans is.

Opgave 5

Laat V een $(n+1)$-dimensionale $\mathbb{C}$-vectorruimte zijn.

a) (2p) We definiëren de lineaire afbeelding

$$f : \Lambda^n V \longrightarrow Hom(V, \Lambda^{n+1} V) = \{\ \phi : V \longrightarrow \Lambda^{n+1} V \text{ lineair }\}$$

door

$$\forall\ \alpha \in \Lambda^{n+1} V\ \forall\ v \in V\ \ :\ \ f(\alpha)(v) := \alpha \wedge v\ .$$

Bewijs dat f surjectief en dus (wegens gelijke dimensies) bijectief, dus een isomorfisme is.

(Hint: Voor $\phi \in Hom(V, \Lambda^{n+1} V)$ kijk naar $\ker(\phi)$ om een origineel te vinden.)

b) (3p) Beschouw de Plücker inbedding

$$pl : \mathbb{P}(V^*) = \{\ n - \text{dimensionale lineaire deelruimten van } V\ \} = G(n, V) \longrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^n V)\ .$$

Bewijs dat dit een bijectieve projectieve transformatie is.

(Hint: Identificeer m.b.v. een basis $\Lambda^{n+1} V$ met $\mathbb{C}$ en $Hom(V, \Lambda^{n+1} V)$ met $Hom(V, \mathbb{C}) = V^*$. Gebruik dan **a)**.)

Voor het cijfer c zal gelden:

$$c \geq f(1 + \frac{3}{8} \cdot [\text{totaal aantal punten}]),$$

waarin f een afrondingsfunctie is.