Tentamen Projectieve Meetkunde

25 juni 2013

10.00 - 13.00 uur

Opgave 1

We voorzien de reële projectieve ruimte $\mathbb{P}^3$ van homogene coördinaten $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$.

a) (2p) Bereken de homogene coördinaten van het snijpunt van de lijn door $p = (1 : 0 : 1 : 0)$ en $q = (2 : -1 : 1 : 3)$ met het vlak gegeven door de vergelijking $x_0 = x_3$.

b) (2p) Stel de vergelijking op van het vlak door de punten $a = (1 : 0 : 0 : 0)$, $b = (0 : 0 : 1 : 0)$ en $c = (1 : 0 : 1 : 1)$.

Opgave 2

a) (3p) Laat l en m twee verschillende lijnen zijn in het projectieve vlak met snijpunt S en $f : l \to m$ een projectieve afbeelding met $f(S) = S$. Bewijs dat f een projectie is.

b) (1p) Laat l, m en n drie verschillende lijnen zijn in het projectieve vlak die niét door één punt gaan en zij $S := l \cap n$. Laat $\pi_1 : l \to m$ en $\pi_2 : m \to n$ twee projecties zijn met de eigenschap:

$$(\pi_2 \circ \pi_1)(S) = S.$$

Bewijs dat de samenstelling $\pi_2 \circ \pi_1$ een projectie is.

c) (2p) Formuleer de Stelling van Pappos.

d) (Bonus opgave 6p) Bewijs de Stelling van Pappos met behulp van opgave a) en b). Rekenen met coördinaten is niet toegestaan!

Opgave 3

Beschouw een projectief vlak met homogene coördinaten $(x_0 : x_1 : x_2)$.

a) (3p) Bepaal een vergelijking voor de kegelsnede met parametervoorstelling

$$(x_0 : x_1 : x_2) = (\lambda^2 - \lambda\mu : \lambda\mu : \mu^2 + \lambda\mu) \ .$$

b) (3p) Bepaal een parametervoorstelling van de kegelsnede met vergelijking

$$x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_0 = 0 \ .$$

Opgave 4

Laat $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ een complex projectief vlak zijn en $Q \subset \mathbb{P}$ een gladde kegelsnede gegeven door de symmetrische bilineaire vorm σ.

a) (1p) Alhoewel het domein van σ per definitie $V \times V$ is, kunnen we toch zinvol praten over de expressie $\sigma(p, q) = 0$ voor willekeurige $p, q \in \mathbb{P}$. Waarom is dit zo?

Voor willekeurige $p \in \mathbb{P}$ definiëren we de *poollijn van p t.o.v. Q* door:

$$L_p := \{x \in \mathbb{P} \ : \ \sigma(p, x) = 0\}.$$

b) (2p) Laat zien dat iedere poollijn t.o.v. deze *gladde* kegelsnede inderdaad een *lijn* is.

c) (2p) Laat zien dat voor iedere $p \in Q$ geldt: $L_p \cap Q = \{p\}$. In dit geval wordt de poollijn van p ook wel de *raaklijn aan Q in p* genoemd.

d) (3p) Laat zien dat voor alle $p, q \in Q$ met $p \neq q$ geldt: $L_p \neq L_q$.

e) (2p) Laat zien dat voor alle $p \in \mathbb{P}$ met $p \notin Q$ de doorsnijding van L_p met Q uit twee verschillende punten s_1 en s_2 bestaat.

f) (1p) Laat zien dat in opgave e) het punt p het snijpunt is van de twee raaklijnen in s_1 en s_2 aan Q.

Opgave 5

Het is in deze opgave verboden coördinaten in te voeren en/of te gaan rekenen!

Een lijn l op de Grassmann-variëteit $G(2, 4)$ van lijnen in $\mathbb{P}^3$ correspondeert met een lijnenwaaier van alle lijnen in een vlak $V \subset \mathbb{P}^3$ door een punt $p \in V$. Notatie: $l = [V, p]$.

Een vlak X op $G(2, 4)$ correspondeert hétzij met de verzameling van lijnen in een vlak $V \subset \mathbb{P}^3$, hétzij met de verzameling van lijnen door een punt $p \in \mathbb{P}^3$. Notatie voor de eerste situatie: $[V]$, notatie voor de tweede situatie: $[p]$.

a) (2p) Laat zien dat er bij iedere lijn $l \subset G(2, 4)$ exact twee verschillende vlakken op $G(2, 4)$ bestaan waar l de doorsnede van is.

b) (2p) Laat $l, m \subset G(2, 4)$ twee verschillende lijnen zijn die elkaar *snijden* met $l = [V, p]$ en $m = [W, q]$. Geef nodig en voldoende voorwaarde in termen van V, W, p en q opdat het opspansel van l en m (dat is een vlak) bevat is in $G(2, 4)$.

Als $p \in \{0, 1, \cdots, 31\} \cup \{32, \cdots, 37\}$ het behaalde aantal punten is, zal voor het tentamencijfer c gelden:

$$c \in \mathbb{Q}_{\geq \min(10, 1+\frac{p}{3})}.$$