# Hertentamen Projectieve Meetkunde

**12 juli 2013**

10.00 - 13.00 uur

**Opgave 1**

We voorzien de reële projectieve ruimte $\mathbb{P}^3$ van homogene coördinaten $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$.

**a) (2p)** Bereken de homogene coördinaten van het snijpunt van de lijn door $p = (1 : 0 : 1 : 0)$ en $q = (2 : -1 : 1 : 3)$ met het vlak gegeven door de vergelijking $x_0 = x_3$.

**b) (2p)** Stel de vergelijking op van het vlak door de punten $a = (1 : 1 : 0 : 0)$, $b = (0 : 0 : 1 : 0)$ en $c = (1 : 0 : 1 : 1)$.

**Opgave 2**

**a) (3p)** Laat $l$ en $m$ twee verschillende lijnen zijn in het projectieve vlak met snijpunt $S$ en $f : l \to m$ een projectieve afbeelding met $f(S) = S$. Bewijs dat $f$ een projectie is.

**b) (1p)** Laat $l$, $m$ en $n$ drie verschillende lijnen zijn in het projectieve vlak die niét door één punt gaan en zij $S := l \cap n$. Laat $\pi_1 : l \to m$ en $\pi_2 : m \to n$ twee projecties zijn met de eigenschap:

$$(\pi_2 \circ \pi_1)(S) = S.$$

Bewijs dat de samenstelling $\pi_2 \circ \pi_1$ een projectie is.

**c) (2p)** Formuleer de Stelling van Desargues.

**Opgave 3**

Beschouw een projectief vlak met homogene coördinaten $(x_0 : x_1 : x_2)$.

**a) (3p)** Bepaal een vergelijking voor de kegelsnede met parametervoorstelling

$$(x_0 : x_1 : x_2) = (\lambda^2 - \lambda\mu : \lambda\mu : \mu^2 + \lambda\mu) \ .$$

**b) (3p)** Bepaal een parametervoorstelling van de kegelsnede met vergelijking

$$x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_0 = 0 \ .$$

**Opgave 4**

Laat $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ een complex projectief vlak zijn en $Q \subset \mathbb{P}$ een gladde kegelsnede gegeven door de symmetrische bilineaire vorm $\sigma$.

**a) (1p)** Alhoewel het domein van $\sigma$ per definitie $V \times V$ is, kunnen we toch zinvol praten over de expressie $\sigma(p,q) = 0$ voor willekeurige $p, q \in \mathbb{P}$. Waarom is dit zo?

Voor willekeurige $p \in \mathbb{P}$ definiëren we de *poollijn van* $p$ *t.o.v.* $Q$ door:

$$L_p := \{x \in \mathbb{P} \ : \ \sigma(p,x) = 0\}.$$

**b) (2p)** Laat zien dat iedere poollijn t.o.v. deze *gladde* kegelsnede inderdaad een *lijn* is.

**c) (2p)** Laat zien dat voor iedere $p \in Q$ geldt: $L_p \cap Q = \{p\}$. In dit geval wordt de poollijn van $p$ ook wel de *raaklijn aan* $Q$ *in* $p$ genoemd.

**d) (3p)** Laat zien dat voor alle $p, q \in \mathbb{P}$ met $p \neq q$ geldt: $L_p \neq L_q$.

**e) (2p)** Laat zien dat voor alle $p \in \mathbb{P}$ met $p \notin Q$ de doorsnijding van $L_p$ met $Q$ uit twee verschillende punten $s_1$ en $s_2$ bestaat.

**f) (1p)** Laat zien dat in opgave e) het punt $p$ het snijpunt is van de twee raaklijnen in $s_1$ en $s_2$ aan $Q$.

**Opgave 5**

Het is in deze opgave verboden coördinaten in te voeren en/of te gaan rekenen!

Een lijn $l$ op de Grassmann-variëteit $G(2,4)$ van lijnen in $\mathbb{P}^3$ correspondeert met een lijnenwaaier van alle lijnen in een vlak $V \subset \mathbb{P}^3$ door een punt $p \in V$. Notatie: $l = [V, p]$.

Een vlak $X$ op $G(2,4)$ correspondeert hétzij met de verzameling van lijnen in een vlak $V \subset \mathbb{P}^3$, hétzij met de verzameling van lijnen door een punt $p \in \mathbb{P}^3$. Notatie voor de eerste situatie: $[V]$, notatie voor de tweede situatie: $[p]$.

**a) (2p)** Laat zien dat er bij iedere lijn $l \subset G(2,4)$ exact twee verschillende vlakken op $G(2,4)$ bestaan waar $l$ de doorsnede van is.

**b) (2p)** Laat $l, m \subset G(2,4)$ twee verschillende lijnen zijn die elkaar *snijden* met $l = [V, p]$ en $m = [W, q]$. Geef nodig en voldoende voorwaarde in termen van $V, W, p$ en $q$ opdat het opspansel van $l$ en $m$ (dat is een vlak) bevat is in $G(2,4)$.

Als $p \in \{0, 1, \cdots, 31\}$ het behaalde aantal punten is, zal voor het tentamencijfer $c$ gelden:

$$c \in \mathbb{Q}_{\geq \min(10, 1+\frac{p}{3})}.$$