Universiteit Leiden
Mathematisch Instituut
Niels Bohrweg 1, Leiden

Tentamen Topologie (TOP)
maandag 18 juni 2007; 14:00 – 17:00 uur.

---

1. We noemen een ruimte extreem onsamenhangend als voor elk tweetal open verzamelingen U en V het volgende geldt: als $U \cap V = \emptyset$ dan $\operatorname{cl} U \cap \operatorname{cl} V = \emptyset$.

(9) a. Toon aan: een ruimte is extreem onsamenhangend dan en slechts dan als voor elke open verzameling U de afsluiting $\operatorname{cl} U$ ook open is.

(8) b. Toon aan: een extreem onsamenhangende Hausdorff ruimte met ten minste twee punten is splitsbaar.

(8) c. Geef een voorbeeld van een (niet-lege) samenhangende T_1-ruimte die extreem onsamenhangend is.

2. Zij $f : X \to Y$ een (willekeurige) afbeelding tussen topologische ruimten. De *grafiek* van f is de verzameling $G(f) = \{(x, y) : y = f(x)\}$.

(8) a. Bewijs: als Y Hausdorff is en f is continu dan is de grafiek van f gesloten in $X \times Y$.

(8) b. Laat $x \in X$ en zij $F = \bigcap\{\operatorname{cl} f[U] : U \in \mathcal{U}_x\}$, waarbij $\mathcal{U}_x$ het omgevingenfilter van x is. Toon aan: als $y \in F$ dan zit (x, y) in de afsluiting van de grafiek van f.

(9) c. Bewijs: als Y compact is en de grafiek van f is gesloten in $X \times Y$ dan is f continu. *Aanwijzing*: Zie het vorige onderdeel, bewijs dat $F = \{f(x)\}$ en gebruik de compactheid om continuïteit in x te bewijzen.

(8) d. Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat de compactheid van Y niet gemist kan worden. *Aanwijzing*: Het kan met $X = Y = \mathbb{R}$.

3. Zij $C = C_1 \cup C_2$, waarbij $C_i = \{z \in \mathbb{C} : |z| = i\}$ $(i = 1, 2)$. Voor $z = e^{it} \in C_1$ en $r > 0$ definiëren we

$$U_r(z) = \{e^{is} : |s - t| < r\} \cup \{2e^{is} : 0 < |s - t| < r\}$$

(teken een plaatje). Voor $z \in C_1$ nemen we $\mathcal{B}_z = \{U_r(z) : r > 0\}$ als lokale basis en voor $z \in C_2$ nemen we $\mathcal{B}_z = \{B : B \subseteq C_2 \text{ en } z \in B\}$.

(8) a. Toon aan dat zo een goede toekenning van lokale bases is gedaan.

(10) b. Onderzoek of C, met deze topologie, de volgende eigenschappen heeft: Hausdorff, samenhang, separabiliteit, eerste aftelbaarheidsaxioma, tweede aftelbaarheidsaxioma, compactheid. Geef bewijzen dan wel (tegen)voorbeelden.

4. Beschrijf, voor elk van de gegeven afbeeldingen $f : S^1 \to S^1$, het bijbehorende homomorfisme $f_* : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, waarbij $\mathbb{Z}$ opgevat wordt als $\pi_1(S^1)$. Geef duidelijke argumenten.

(8) a. $f(z) = -z$

(8) b. $f(z) = z^n$ (met $n \in \mathbb{Z}$ vast)

(8) c. $f(z) = \begin{cases} z & \text{als } \operatorname{Im} z \geqslant 0 \\ \bar{z} & \text{als } \operatorname{Im} z \leqslant 0 \end{cases}$

De waardering voor elke vraag staat in de kantlijn; het cijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{Totaal}}{10}$$

en op de gebruikelijke wijze afgerond.

EINDE