Universiteit Leiden
Mathematisch Instituut
Niels Bohrweg 1, Leiden

Tentamen Topologie (TOP)
maandag 27 augustus 2007; 14:00 – 17:00 uur.

Bij het nakijken wordt ook gelet op de gegeven uitleg, argumenten en het schrijfwerk.

---

1. We noemen een verzameling U in een topologische ruimte X *regulier open* als $U = \operatorname{int}\operatorname{cl} U$.

(5) a. Geef, bijvoorbeeld binnen $\mathbb{R}$ met de gewone topologie, voorbeelden van open verzamelingen die wel en die niet regulier open zijn,

(5) b. Toon aan: als F gesloten is dan is $\operatorname{int} F$ regulier open.

(5) c. Toon aan: in een reguliere ruimte vormen de regulier open verzamelingen een basis.

(5) d. Als D een dichte verzameling is en U en V zijn regulier open dan geldt: als $U \cap D = V \cap D$ dan $U = V$.

(5) e. Toon aan dat het vorige onderdeel niet geldt voor willekeurige open verzamelingen.

2. Zij $C = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ met de producttopologie, waarbij $\{0,1\}$ de discrete topologie draagt.

(6) a. Definieer een rij $\langle x_n \rangle_n$ in C door: $x_n(i) = 1$ als $i = n$ en $x_n(i) = 0$ als $i \neq n$. Convergeert de rij $\langle x_n \rangle_n$? Wat is de (eventuele) limiet?

(6) b. Bewijs: $C \times C$ is homeomorf met C.

Definieer $f : C \to [0,1]$ door $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x(i) \cdot 2^{-i}$.

(6) c. Bewijs dat f continu is ($[0,1]$ draagt de gewone topologie).

(6) d. Bewijs dat f surjectief is *zonder van dyadische ontwikkelingen gebruik te maken. Aanwijzing*: Toon aan: $f[C]$ is dicht en gesloten.

(6) e. Bewijs: voor elke n is er een continue en surjectieve afbeelding $g_n : C \to [0,1]^n$.

3. Zij V het vierkant $[0,1]^2$ en definieer $\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y}$ als $x_1 < y_1$ of $x_1 = y_1$ en $x_2 < y_2$. (Dan is $\prec$ een lineaire orde; dit hoeft niet worden aangetoond.) Op V nemen we de topologie die de volgende familie als *subbasis* heeft:

$$\mathcal{S} = \bigl\{ \bigl[(0,0), \boldsymbol{x}\bigr) : x \in V \bigr\} \cup \bigl\{ \bigl(\boldsymbol{x}, (1,1)\bigr] : x \in V \bigr\}$$

(5) a. Schets de intervallen $\bigl((\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})\bigr)$, $\bigl[(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})\bigr)$ en $\bigl[(\frac{1}{3}, 0), (\frac{1}{2}, 0)\bigr]$.

(5) b. Zit $(\frac{1}{2}, 0)$ in $\operatorname{cl}\bigl([0, \frac{1}{2}) \times \{0\}\bigr)$, in $\operatorname{cl}\bigl((\frac{1}{2}, 1] \times \{0\}\bigr)$? Leg uit.

(5) c. Convergeert de rij $\bigl\langle (\frac{1}{n}, \frac{1}{2}) \bigr\rangle_n$? Wat is de (eventuele) limiet?

(6) d. Bewijs dat $(0,1) \times \{1\}$ homeomorf is met de Sorgenfrey-lijn.

(9) e. Onderzoek of V de volgende eigenschappen heeft: eerste aftelbaarheidsaxioma, separabel, compact (denk aan het Lemma van Alexander).

(15) 4. Zij $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ de eenheidsschijf in het platte vlak en zij $S^1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ de eenheidscirkel. Zij $f : D \to \mathbb{R}^2$ een continue afbeelding met de eigenschap dat $f(x,y) = (x,y)$ voor $(x,y) \in S^1$. Bewijs dat $D \subseteq f[D]$.

De waardering voor elke vraag staat in de kantlijn; het cijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{Totaal}}{10}$$

en op de gebruikelijke wijze afgerond.

EINDE