

TENTAMEN TOPOLOGIE, 02-06-2008

10.00-13.00 uur, zaal 174

Het gebruik van elektronische hulpmiddelen (rekenmachine (al dan niet grafisch), mobiele telefoon, laptop etc.) is niet toegestaan.

Let op: Het cijfer voor dit schriftelijk tentamen is gelijk aan

$\min(10, \max(1, \text{aantal behaalde punten}))$.

Er zijn opgaven t.w.v. 12 punten, maar het cijfer voor dit tentamen is maximaal een 10; kies de te maken opgaven dus goed uit.

1. Voor $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ definieer $V_{(a,b)} := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq a, y \geq b \}$.
 - (a) (0.5 punt) Bewijs dat $\mathcal{B} := \{ V_{(a,b)} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \}$ de basis van een topologie $\mathcal{T}_V$ in $\mathbb{R}^2$ is.
 - (b) (1.5 punten) Is de topologische ruimte $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_V)$
 - i. Hausdorffs,
 - ii. compact,
 - iii. 1-aftelbaar?
2. (2 punten) Laat X een topologische ruimte zijn, en beschouw $X \times X$ met de producttopologie. Bewijs dat de volgende twee uitspraken equivalent zijn.
 - (a) $(X, \mathcal{T})$ is een Hausdorffruimte.
 - (b) De diagonaal $\{ (x, x) \in X \times X \mid x \in X \}$ is gesloten in $X \times X$.
3. (1.5 punten) Laat X een rijcompacte ruimte zijn en $f : X \longrightarrow Y$ een surjectieve continue afbeelding. Bewijs dat Y rijcompact is.

Hint: Gebruik het feit dat een continue afbeelding rijcontinu is.
4.
 - (a) (1 punt) Geef de precieze definitie van een 1- resp. 2-aftelbare topologische ruimte.
 - (b) (1 punt) Bewijs, gebruikmakend alleen van de definities, dat een 2-aftelbare topologische ruimte ook 1-aftelbaar is.
5. (2 punten) Bepaal voor elk van de volgende topologische ruimten de fundamentealgroep. Een exact bewijs is niet nodig; een goed meetkundig argument (bij voorkeur ondersteund door een plaatje) is voldoende.
 - (a) $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0 \}$
 - (b) $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2 \}$
 - (c) $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 \}$
 - (d) $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1 \}$

Opgave 6 z.o.z.

6. Laat X, Y en Z wegsamenhangende en lokaal enkelvoudig samenhangende ruimten zijn, $\pi : Y \longrightarrow X$ een overdekking en $\sigma : Z \longrightarrow X$ een universele overdekking. Laat verder $p \in X$, $q \in Y$ en $r \in Z$ zijn met $\pi(q) = p$ en $\sigma(r) = p$.

(a) (0.5 punt) Bewijs dat de afbeelding

$$\text{Dek}(Z/X) \longrightarrow \sigma^{-1}(p) \quad , \quad f \mapsto f(r)$$

bijjectief is.

- (b) (2 punten) Op college werd bewezen dat $\text{Dek}(Z, Y) \subset \text{Dek}(Z, X)$ een ondergroep is. Bewijs dat

$$\text{Dek}(Z, Y) = \text{Dek}(Z, X) \iff \pi \text{ is een homeomorfisme.}$$