

TENTAMEN TOPOLOGIE, 4 JUNI 2009

Het is toegestaan boeken, aantekeningen, opgeloste sommen te raadplegen.

Geef volledige argumenten, motiveer elke uitspraak en geef duidelijk aan wat je gebruikt.

- (1) Zij $X = \mathbf{R}$ met de speldentopologie. Deze wordt gegeven door de basis

$$\{[a, b) : a < b, a, b \in \mathbf{R}\}.$$

- (a) Laat zien dat voor alle $a \in \mathbf{R}$ de deelverzamelingen $(-\infty, a)$ en $[a, \infty)$ open zijn in X .
- (b) Zij $x, y \in X$. Laat zien dat er een weg van x naar y bestaat dan en slechts dan als $x = y$.
- (2) Een deelverzameling A van een topologische ruimte X heet dicht in X als geldt $\bar{A} = X$. Zij X een topologische ruimte, $Z \subset Y \subset X$ deelverzamelingen. Geef Y de geïnduceerde topologie. Neem aan dat Z dicht is in Y en Y dicht in Z . Bewijs dat Z dicht is in X .
- (3) Laat zien dat elke eindige Hausdorffse topologische ruimte discreet is.
- (4) Beschouw de x -as $L := \{(x, 0, 0) : x \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^3$. Zij $X \subset \mathbf{R}^3$ het complement van L met de geïnduceerde topologie. Zij $p \in X$. Bewijs dat $\pi_1(X, p)$ isomorf is met $\mathbf{Z}$. (Hint: herleid tot de fundamentealgroep van de cirkel.)
- (5) Zij X en Y niet-lege Hausdorffse topologische ruimten en geef $X \times Y$ de produkttopologie. Noteer de projecties van $X \times Y$ naar X en Y met p_X en p_Y respectievelijk. Zij Z een deelverzameling van $X \times Y$. Laat zien dat de volgende uitspraken equivalent zijn:
 - (a) Z is compact;
 - (b) Z is gesloten en $p_X(Z) \subset X$ en $p_Y(Z) \subset Y$ zijn compact.

Succes!