Tentamen Topologie

23 augustus 2010, 14:00–17:00

Dit tentamen is *geen* open-boek-tentamen.

Opgave 1. Bewijs of weerleg met een tegenvoorbeeld:

(a) de vereniging van twee compacte deelruimten van $\mathbb{R}^2$ is compact;

(b) elke compacte deelruimte van $\mathbb{R}^2$ is samenhangend;

(c) de vereniging van twee complete deelruimten van $\mathbb{R}^2$ is compleet.

Opgave 2. Geef een matrix van 12 ja/nee antwoorden die aangeven of de vier deelruimten van $\mathbb{R}^2$ in de eerste kolom van de tabel hieronder de eigenschappen in de eerste rij hebben. Je hoeft er geen uitleg bij te geven.

	compact	compleet	samenhangend
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x^2 - y^2 \leq 10\}$			
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x^2 - y^2 > 10\}$			
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x^2 + y^2 \leq 10 \text{ en } x^2 \geq 1\}$			
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x \in \mathbb{Q} \text{ of } y = 0\}$			

Opgave 3. Laat X een compacte topologische ruimte zijn, en laat $f\colon X \to \mathbb{R}$ een continue afbeelding zijn.

(a) Geef de definitie van compactheid.

(b) Bewijs met deze definitie dat f begrensd is, d.w.z. dat er een $N \in \mathbb{R}$ is met $f(x) < N$ voor alle $x \in X$.

(c) Bewijs dat f zijn maximum aanneemt, d.w.z dat er een $x \in X$ is met $f(x) \geq f(y)$ voor alle $y \in X$.

Opgave 4. Laat $S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\colon\ x_1^2 + x_2^2 = 1\}$.

(a) Wanneer noemen we twee afbeeldingen van S^1 naar S^1 homotoop? (Geef de definitie.)

(b) Laat zien dat de afbeelding $S^1 \to S^1$ gegeven door $x \mapsto -x$ homotoop is met de identieke afbeelding gegeven door $x \mapsto x$.

(c) Stel dat $f\colon S^1 \to S^1$ continu is en voor elke $x \in S^1$ geldt $f(x) \neq -x$. Laat zien dat f homotoop is met de identieke afbeelding.

— SUCCES!! —