TENTAMEN TOPOLOGIE, 26 MEI 2011

Het is niet toegestaan literatuur of aantekeningen te raadplegen.

Geef volledige argumenten, motiveer elke uitspraak en geef duidelijk aan wat je gebruikt.

(1) (a) Zij (X, d) een compacte metrische ruimte. Toon aan dat er een $C \in \mathbf{R}$ bestaat zodat voor alle x, y geldt $d(x, y) \leq C$.
  (b) Geef een voorbeeld van een niet-compacte metrische ruimte (X, d) zodat voor alle $x, y \in X$ geldt $d(x, y) \leq 1$. (Uiteraard met bewijs.)

(2) Zij (X, d) een compacte metrische ruimte en $f\colon X \to X$ een continue afbeelding.
  (a) Bewijs dat de afbeelding $X \to \mathbf{R}\colon x \mapsto d(x, f(x))$ continu is.
  (b) Neem aan dat voor alle $x \in X$ geldt dat $f(x) \neq x$. Toon aan dat er een $\epsilon > 0$ bestaat zodat voor alle $x \in X$ geldt $d(x, f(x)) \geq \epsilon$.

(3) Zij X en Y niet-lege topologische ruimten. Neem aan dat $X \times Y$ samenhangend is, laat zien dat X en Y samenhangend zijn.

(4) Beschouw op $\mathbf{R}$ de equivalentierelatie $\sim$ gegeven door $x \sim y$ desda $x - y \in \mathbf{Q}$. Laat zien dat de quotiëntruimte $\mathbf{R}/\sim$ niet Hausdorff is.

(5) (a) Zij f, g continue afbeeldingen van X naar Y. Definieer het homotoop zijn van f en g.
  (b) Zij $f\colon \mathbf{C} \setminus \{0\} \to \mathbf{C} \setminus \{0\}$ een continue afbeelding met zodat voor alle $x \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ geldt $f(x) \notin \{-\lambda x : \lambda > 0\}$. Toon aan dat f homotoop is met de identiteitsafbeelding $x \mapsto x$.
  (c) Geef twee continue afbeeldingen van S^1 naar S^1 die niet homotoop zijn. (Uiteraard met bewijs.)

(6) Zij A een dichte deelverzameling van de topologische ruimte X en $U \subset X$ open. Bewijs dat $U \subset \overline{A \cap U}$.

Succes!

(10+10) + (10+10) + 10 + 10 + (5+10+10) + 5 = 90