

HERTENTAMEN TOPOLOGIE, 8 AUGUSTUS 2011

Het is niet toegestaan literatuur of aantekeningen te raadplegen.

Geef volledige argumenten, motiveer elke uitspraak en geef duidelijk aan wat je gebruikt.

- (1) (a) Zij X een topologische ruimte. Geef de definitie van het Hausdorff-zijn van X .
(b) Bewijs dat elke metrische ruimte Hausdorff is.
- (2) Zij (X, d) een compacte metrische ruimte.
(a) Zij $(x_i)_{i \in \mathbf{N}}$ en $(y_i)_{i \in \mathbf{N}}$ twee rijen in X . Laat zien dat de reeks

$$\sum_{i \in \mathbf{N}} \frac{1}{2^i} d(x_i, y_i)$$

convergeert.

- (b) Zij S de verzameling van rijen in X . Laat zien dat

$$S \times S \rightarrow \mathbf{R}: ((x_i)_i, (y_i)_i) \mapsto \sum_{i \in \mathbf{N}} \frac{1}{2^i} d(x_i, y_i)$$

een metriek op S definieert.

- (3) (a) Zij X een topologische ruimte, S een verzameling en $h: X \rightarrow S$ een surjectieve functie. Geef een definitie van de quotiënttopologie voor h op S .
(b) Zij $f: X \rightarrow Y$ een continue afbeelding tussen topologische ruimten. Zij S een verzameling en $g: Y \rightarrow S$ een functie. Neem aan dat $g \circ f$ surjectief is, en dat S de quotiënttopologie heeft voor $g \circ f$. Neem aan dat g continu is. Laat zien dat S de quotiënttopologie heeft voor g .
- (4) Geef telkens een bewijs van je antwoord.
 - (a) Is er een continue surjectieve afbeelding van $\mathbf{C}$ naar $\mathbf{C} - \{0\}$?
 - (b) Is er een continue surjectieve afbeelding van $\mathbf{R}$ naar $\mathbf{R} - \{0\}$?
 - (c) Is er een continue surjectieve afbeelding van $\mathbf{R} - \{0\}$ naar $\mathbf{R}$?
 - (d) Is er een continue surjectieve afbeelding van S^1 naar $S^1 - \{1\}$?
- (5) Beschouw de eenheidscirkel $S^1 \subset \mathbf{C}$. Zij $n \in \mathbf{Z}$.
 - (a) Zij $f: S^1 \rightarrow S^1$ de afbeelding $z \mapsto z^n$. Wat is de geïnduceerde afbeelding $f_*: \pi_1(S^1, \{1\}) \rightarrow \pi_1(S^1, \{1\})$?
 - (b) Zij D de gesloten eenheidsschijf in $\mathbf{C}$ en $g: D \rightarrow S^1$ een continue afbeelding zodat $g(x) = x^n$ voor alle $x \in S^1 \subset D$. Laat zien dat $n = 0$.

Succes!

$$(5+10) + (10+10) + (5+10) + (5+5+5+5) + (10+10) = 90$$