

TENTAMEN TOPOLOGIE, 7 JUNI 2012

Het is niet toegestaan literatuur of aantekeningen te raadplegen. Geef volledige argumenten, motiveer elke uitspraak en geef duidelijk aan wat je gebruikt.

- (1) Zij (X, d) een metrische ruimte en $S \subset X$ een niet-lege deelverzameling. Zij $x \in X$. Laat zien dat $x \in \bar{S}$ dan en slechts dan als $\inf\{d(x, s) : s \in S\} = 0$.
- (2) Zij X een verzameling en d_1 en d_2 metrieken op X . Neem aan voor alle $x, y \in X$ geldt dat $d_2(x, y) \leq d_1(x, y)$.
 - (a) Bewijs dat elke open deelverzameling van (X, d_2) ook open is in (X, d_1) .
 - (b) Zij $K \subset X$ compact in (X, d_1) . Laat zien dat K compact is in (X, d_2) .
 - (c) Neem aan dat (X, d_1) compact is. Bewijs dat de topologieën op X gegeven door d_1 en d_2 gelijk zijn.
- (3) Zij X en Y topologische ruimten en $A \subset X$ en $B \subset Y$ deelverzamelingen. Geef $X \times Y$ de producttopologie. Bewijs dat $(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$.
- (4) Zij $(X, \mathcal{T})$ een Hausdorffse topologische ruimte. Zij

$$\mathcal{T}' = \{S \subset X : X \setminus S \text{ is compact}\} \cup \{\emptyset\}.$$

Bewijs dat $\mathcal{T}'$ een topologie is op X .

- (5) Zij X een topologische ruimte en $q: X \rightarrow Y$ een surjectieve afbeelding. Geef Y de quotiënttopologie. Neem aan dat Y samenhangend is, en dat voor alle $y \in Y$ de deelruimte $q^{-1}(y) \subset X$ samenhangend is. Bewijs dat X samenhangend is.
- (6) (a) Zij f, g continue afbeeldingen van X naar Y . Geef een definitie van het homotoop zijn van f en g .
(b) Zij $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ en f een continue afbeelding van $\mathbf{R}^n$ naar een topologische ruimte Y . Bewijs dat f homotoop is met een constante afbeelding.
- (7) Zij $X = S^1 \times S^1$. Geef (met bewijs) een oneindige collectie homeomorfismen $f_i: X \rightarrow X$ zodat voor alle $i \neq j$ geldt dat f_i en f_j niet homotoop zijn.

Succes!

$$10 + 20 + 10 + 10 + 15 + 15 + 10 = 90$$