

HERTENTAMEN TOPOLOGIE, 20 AUGUSTUS 2012, 14.00-17.00

Het is niet toegestaan literatuur of aantekeningen te raadplegen. Geef volledige argumenten, motiveer elke uitspraak en geef duidelijk aan wat je gebruikt.

- (1) Geef (zonder bewijs) voor elk van volgende deelruimten van $\mathbf{R}$ (met de Euclidische topologie) aan of ze Hausdorff, compact, samenhangend en/of wegsamenhangend zijn: $[0, 1)$, $[0, 1]$, $\mathbf{Z}$, $\{0, 1\}$, $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.
- (2) Zij (X, d) een metrische ruimte en S een deelverzameling van X . Laat zien dat de afbeelding

$$f: X \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \inf \{d(x, s) : s \in S\},$$

met de Euclidische metriek op $\mathbf{R}$ een continue afbeelding is.

- (3) Zij X en Y topologische ruimten en $A \subset X$ en $B \subset Y$ deelverzamelingen. Geef $X \times Y$ de producttopologie. Bewijs dat $(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$.
- (4) Zij X een oneindige verzameling en zij $\mathcal{T}$ de topologie

$$\mathcal{T} = \{S \subset X : X \setminus S \text{ is eindig}\} \cup \{\emptyset\}.$$

op X . Bewijs dat $(X, \mathcal{T})$ compact is. Bewijs dat $(X, \mathcal{T})$ niet Hausdorff is. Bewijs dat $(X, \mathcal{T})$ samenhangend is.

- (5) Zij X een topologische ruimte.
 - (a) Zij f, g continue afbeeldingen van X naar S^1 . Geef een definitie van het homotoop zijn van f en g .
 - (b) Zij f een continue afbeelding van X naar S^1 die niet surjectief is. Bewijs dat f homotoop is met een constante afbeelding.
- (6) Zij $n \geq 2$. Beschouw op $X = \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ de equivalentierelaties

$$x \sim_1 y \iff \text{er is een } \lambda \in \mathbf{R}_{>0} \text{ met } \lambda x = y$$

en

$$x \sim_2 y \iff \text{er is een } \lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \text{ met } \lambda x = y.$$

Zij Y_1 en Y_2 respectievelijk de quotiëntruimten $X/\sim_1$ en $X/\sim_2$. Laat zien dat de afbeelding $Y_1 \rightarrow Y_2: [x] \mapsto [x]$ een overdekkingsruimte is. Zij $y \in Y_2$. Bepaal $\pi_1(Y_2, y)$. Je mag hierbij gebruiken dat de fundamentealgroep van S^n triviaal is voor alle $n \geq 2$.

Succes!

$$10 + 15 + 15 + 15 + 15 + 20 = 90$$