

TENTAMEN TOPOLOGIE, 6 JUNI 2013

Het is niet toegestaan literatuur of aantekeningen te raadplegen. Geef volledige argumenten, motiveer elke uitspraak en geef duidelijk aan wat je gebruikt.

- (1) Geef (zonder bewijs) voor volgende deelverzamelingen van $\mathbf{R}^n$ aan of ze open, gesloten, compact en/of samenhangend zijn.
 - (a) $\{1/n \mid n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}\}$ in $\mathbf{R}$;
 - (b) $\mathbf{Q} \cap (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ in $\mathbf{R}$;
 - (c) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy = 1\}$ in $\mathbf{R}^2$;
 - (d) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ in $\mathbf{R}^2$;
 - (e) $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \sin x + \sin y + \sin z \neq 1\}$ in $\mathbf{R}^3$.
- (2) Zij (X, d) een metrische ruimte. Een deelverzameling S van X heet *begrensd* als er een $M \in \mathbf{R}$ is zodat voor alle $s, t \in S$ geldt $d(s, t) < M$. Zij $x_0 \in X$.
 - (a) Laat zien dat voor elke begrensde deelverzameling $S \subset X$ er een $r > 0$ is zodat $S \subset \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\}$.
 - (b) Laat zien dat de volgende twee uitspraken equivalent zijn:
 - (i) elke gesloten en begrensde deelverzameling van X is compact;
 - (ii) voor alle $\epsilon \geq 0$ is $\{x \in X \mid d(x, x_0) \leq \epsilon\}$ compact.
- (3) Zij X een topologische ruimte en $f: [0, 1] \rightarrow X$ een continue afbeelding. Laat zien dat f homotoop is met de afbeelding $[0, 1] \rightarrow X, s \mapsto f(0)$.
- (4) Zij X een topologische ruimte, (z_n) een rij in X en $z \in X$. Geef een definitie van “ (z_n) convergeert naar z ”. Laat zien dat volgende twee uitspraken equivalent zijn¹
 - (a) voor alle $x, y \in X$ met $x \neq y$ is er een open omgeving U van x met $y \notin U$;
 - (b) voor elke rij (x_n) in X en voor alle $x, x' \in X$ geldt: als (x_n) naar zowel x als naar x' convergeert dan is $x = x'$.
- (5) Zij X en Y Hausdorffse topologische ruimten. Zij $f: X \rightarrow Y$ en $g: Y \rightarrow X$ continu. Laat zien dat de deelverzameling

$$\{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = y \text{ en } g(y) = x\}$$

gesloten is in de produkttopologie op $X \times Y$.

- (6) (a) Zij X een topologische ruimte en $x_0 \in X$. Neem aan dat voor alle open $U \subset X$ met $x_0 \in U$ geldt dat $X \setminus U$ compact is. Laat zien dat X compact is.
- (b) Zij Y een topologische ruimte. Laat zien dat er een topologische ruimte X bestaat met $Y \subset X$ en $X \setminus Y$ een singleton, zodat Y de geïnduceerde topologie heeft en X compact is.

Succes!

¹Correctie: (b) impliceert (a) maar niet omgekeerd.

$$20 + 15 + 10 + 15 + 15 + 15 = 90$$