

HERTENTAMEN TOPOLOGIE, 4 JULI 2013

Het is niet toegestaan literatuur of aantekeningen te raadplegen. Geef volledige argumenten, motiveer elke uitspraak en geef duidelijk aan wat je gebruikt.

- (1) Geef (zonder bewijs) voor volgende deelverzamelingen van $\mathbf{R}^n$ aan of ze open, gesloten, compact en/of samenhangend zijn.
 - (a) $\{\sin n : n \in \mathbf{Z}\}$ in $\mathbf{R}$;
 - (b) $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ in $\mathbf{R}$;
 - (c) $\mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{Z}^2$ in $\mathbf{R}^2$;
 - (d) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$ in $\mathbf{R}^2$;
 - (e) $\{(e^{abc}, a + b + c, ab + bc + ca) \in \mathbf{R}^3 \mid a, b, c \in [0, 1]\}$ in $\mathbf{R}^3$.
- (2) Zij (X, d) een metrische ruimte, $x_0 \in X$ en $S = \{x \in X \mid d(x, x_0) = 1\} \subset X$.
 - (a) Laat zien dat S gesloten is.
 - (b) Geef een voorbeeld van een metrische ruimte (X, d) en een $x_0 \in X$ waarbij S niet compact is. (Met bewijs)
- (3) Zij X een topologische ruimte.
 - (a) Geef een definitie van “De rij $(z_n)_n$ convergeert in X naar z ”.
 - (b) Neem aan dat X Hausdorff is. Bewijs dat voor elke rij (x_n) in X en voor alle $x, x' \in X$ geldt: als (x_n) naar zowel x als naar x' convergeert dan is $x = x'$.
 - (c) Neem aan dat X *eindig* is en dat voor elke rij (x_n) in X en voor alle $x, x' \in X$ geldt: als (x_n) naar zowel x als naar x' convergeert dan is $x = x'$. Bewijs dat X Hausdorff is.
- (4) Geef een definitie van wegsamenhang van topologische ruimten.
 - (a) Zij X en Y wegsamenhangende topologische ruimten. Laat zien dat $X \times Y$ wegsamenhangend is.
 - (b) Zij X en Y niet-lege topologische ruimten en neem aan dat $X \times Y$ wegsamenhangend is. Bewijs dat X en Y wegsamenhangend zijn.
- (5) Geef een definitie van het homotoop zijn van continue afbeeldingen. Zij X en Y topologische ruimten en $x_0 \in X$. Neem aan dat id_X homotoop is met de constante afbeelding $X \rightarrow X, x \mapsto x_0$. Bewijs dat voor alle continue $f, g: Y \rightarrow X$ geldt dat f en g homotoop zijn.
- (6) Zij X de verzameling van rijtjes $(x_i)_{i=0}^\infty$ met $x_i \in \{0, 1\}$, met metriek

$$d((x_i), (y_i)) = \begin{cases} e^{-\min\{n \geq 0 \mid x_n \neq y_n\}} & \text{als } (x_i)_i \neq (y_i)_i \\ 0 & \text{als } (x_i)_i = (y_i)_i \end{cases}$$

Je hoeft niet na te gaan dat dit wel degelijk een metriek is.

- (a) Bewijs dat elke open bal in X gesloten is.
- (b) Laat zien dat elke continue afbeelding $f: [0, 1] \rightarrow X$ constant is.
- (c) Geef een continue injectieve afbeelding $f: X \rightarrow \mathbf{R}$. (Met bewijs)

Succes!