HERTENTAMEN TOPOLOGIE, 3 JULI 2014

Literatuur en aantekeningen zijn niet toegestaan. Geef volledige argumenten, motiveer elke uitspraak en geef duidelijk aan wat je gebruikt. Succes!

(1, 16pt) Geef (zonder bewijs) voor volgende deelverzamelingen van $\mathbf{R}^n$ aan of ze open, gesloten, compact en/of samenhangend zijn.
- (a) $\mathbf{Q} \times \mathbf{R} \cup \mathbf{R} \times \mathbf{Q}$ in $\mathbf{R}^2$;
- (b) $\{x \in \mathbf{R}^3 \mid d(x, 0) = 1\}$ in $\mathbf{R}^3$;
- (c) $\{x \in \mathbf{R}^2 \mid d(x, 0) \leq 1\} \setminus \{(0, 0)\}$ in $\mathbf{R}^2$;
- (d) $\{(a, b, c) \in \mathbf{R}^3 \mid b^2 - 4ac \neq 0\}$ in $\mathbf{R}^3$.

(2, 15pt) Zij (X, d) een metrische ruimte en $Y \subset X$ een deelverzameling. Zij $d_{|Y}$ de beperking van de metriek d tot Y.
- (a) Geef een definitie van "$(Y, d_{|Y})$ is volledig".
- (b) Stel $(Y, d_{|Y})$ is volledig. Bewijs dat Y gesloten is in (X, d).

(3, 15pt) Zij (X, d_X) en (Y, d_Y) metrische ruimten. Beschouw de metriek

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}.$$

op $X \times Y$. Zij $\mathcal{T}_1$ de produkttopologie op $X \times Y$, en zij $\mathcal{T}_2$ de topologie op $X \times Y$ gedefinieerd door de metriek d.
- (a) Geef een basis $\mathcal{B}_1$ voor $\mathcal{T}_1$. Laat zien dat $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{T}_2$.
- (b) Geef een basis $\mathcal{B}_2$ voor $\mathcal{T}_2$. Laat zien dat $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{T}_1$.
- (c) Bewijs dat $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

(4, 14pt) Zij X een topologische ruimte en zij $\sim$ een equivalentierelatie op X. Neem aan dat de quotiëntruimte $X/\sim$ Hausdorff is. Laat zien dat

$$R = \{(x, y) \in X \times X \mid x \sim y\}$$

gesloten is in de produkttopologie op $X \times X$.

(5, 15pt) Beschouw de volgende collectie deelverzamelingen van $\mathbf{R}$,

$$\mathcal{T} := \{U \subset \mathbf{R} \mid \forall u \in U, \exists a, b \in \mathbf{R} \text{ zodat } u \in [a, b) \text{ en } [a, b) \subset U\}.$$

- (a) Laat zien dat $\mathcal{T}$ een topologie op $\mathbf{R}$ is.
- (b) Laat zien dat $\mathcal{T}$ de Euclidische topologie op $\mathbf{R}$ bevat.
- (c) Is $(\mathbf{R}, \mathcal{T})$ samenhangend?

(6, 15pt)
- (a) Zij $f\colon X \to Y$ en $s\colon Y \to X$ continue afbeeldingen met $f \circ s = \mathrm{id}_Y$. Zij $y \in Y$ en stel $x := s(y)$. Laat zien dat $f_*\colon \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, y)$ surjectief is.
- (b) Zij Z een topologische ruimte en $z \in Z$. Zij $e \in S^1$. Beschouw op de disjuncte vereniging $S^1 \sqcup Z$ de equivalentierelatie die e identificeert met z, met andere woorden:

  $$a \sim b \iff a = b \text{ of } \{a, b\} = \{e, z\}.$$

  Zij $X = (S^1 \sqcup Z)/\sim$ en zij $x \in X$ de klasse van e en z. Laat zien dat $\pi_1(X, x)$ niet triviaal is.