Tentamen Wiskundige Structuren

3 juni 2010, 10:00–13:00, zaal 174

Bewijs al je beweringen. Schrijf kort, duidelijk en net. Rekenmachines en documenten (bijvoorbeeld het dictaat) zijn niet toegestaan. Tijdsduur: 3 uur. Succes!

1. (a) Laat A en B verzamelingen zijn. Geef een definitie van "functie van A naar B".
   (b) Is er een functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zodat voor alle $x \in \mathbb{R}$ met $x \neq 0$ geldt dat $f(x) = 1/x$?
   (c) Zijn de functies zijn $f\colon \mathbb{R} \to [0,1]$, $x \mapsto 1/(x^2+1)$ en $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/(x^2+1)$ aan elkaar gelijk?
   (d) Zijn de functies $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{1+2x+x^2}$ en $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x+1|$ gelijk?
2. Bewijs met volledige inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ geldt dat:
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\cdot(i+1)} = \frac{n}{n+1}.$$
3. (a) Geef definities van supremum en maximum van een deelverzameling V van $\mathbb{R}$.
   (b) Laat V en W deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zijn die beide een maximum hebben, en zodat $V \cap W \neq \emptyset$. Bewijs of weerleg:
      i. $V \cap W$ heeft een supremum;
      ii. $V \cap W$ heeft een maximum.
4. Laat $D \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ een reële functie, en c in D.
   (a) Geef de definitie van continuïteit van f in c.
   (b) Laat $E \subseteq \mathbb{R}$ en $g\colon E \to \mathbb{R}$ zodat $f[D] \subseteq E$. Neem aan dat f continu is in c, en g continu in $f(c)$. Bewijs rechtstreeks uit de definitie dat $g \circ f\colon D \to \mathbb{R}$ continu is in c.
5. Laat $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   (a) Geef een definitie van differentieerbaarheid van f in $c \in \mathbb{R}$.
   (b) Formuleer de middelwaardestelling.
   (c) Neem aan dat f differentieerbaar is met begrensde afgeleide. Bewijs dat f uniform continu is.
6. Bewijs de volledigheidsstelling: iedere Cauchyrij in $\mathbb{R}$ is begrensd en convergent.

((9+2+2+2)+(15)+(5+5+5)+(5+10)+(5+5+5)+(15)=90)