Herkansing Wiskundige Structuren

4 juni 2009, 10:00–13:00

Bewijs al je beweringen. Schrijf kort, duidelijk en net. Rekenmachines en documenten (bijvoorbeeld het dictaat) zijn niet toegestaan. Tijdsduur: 3 uur. Succes!

1. (a) Laat $f\colon A \to B$ een functie zijn. Geef een definitie van bijectiviteit van f.
   (b) Laat $f\colon A \to B$ een bijectieve functie zijn. Geef een definitie van de inverse van f.
   (c) Laat $f\colon (0,\infty) \to (0,1)$, $x \mapsto x/(x+1)$. Besluit of f wel of niet bijectief is, en zo wel, geef de inverse.

2. Bewijs met volledige inductie dat voor iedere $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ geldt:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{n^3 - n}{3}.$$

3. Zij $V \subseteq \mathbb{R}$ niet leeg en naar boven begrensd.
   (a) Geef een definitie van convergentie van een reële rij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ naar een reëel getal x.
   (b) Geef definities van bovengrens van V en van $\sup(V)$.
   (c) Laat zien dat er een rij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in V is die naar $\sup(V)$ convergeert.

4. (a) Laat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente reële rijen zijn, met limieten x en y. Bewijs, rechtstreeks uit de definitie, dat de rijen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ begrensd zijn, en dat de rij $(x_ny_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert naar xy.
   (b) Geef een voorbeeld van reële rijen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die beide niet convergeren terwijl $(x_ny_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wel convergeert.

5. Bewijs of weerleg: $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = \sqrt{x}$ is uniform continu.

6. (a) Laat $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $c \in \mathbb{R}$. Geef een definitie van differentieerbaarheid van f in c met afgeleide L.
   (b) Laat $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$. Is f differentieerbaar in 0?
   (c) Laat $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x\sqrt{|x|}$. Is f differentieerbaar in 0?

7. Formuleer en bewijs de stelling van Bolzano-Weierstrass. Je mag hierbij gebruiken dat alle reële Cauchyrijen convergent zijn.

((5+5+5)+(10)+(5+5+5)+(5+5)+(10)+(5+5+5)+(15)=90)